PODSTAWA PROGRAMOWA EDUKACJI WCZESNOSZKOLNEJ W ZAKRESIE *MATEMATYKI*

I etap edukacyjny: klasy I–III

Treści nauczania – klasa I szkoły podstawowej

Edukacja matematyczna. Wspomaganie rozwoju umysłowego oraz kształtowanie wiadomości i umiejętności matematycznych dzieci. Uczeń kończący klasę I:

1) w zakresie czynności umysłowych ważnych dla uczenia się matematyki:
   a) ustala równoliczność mimo obserwowanych zmian w układzie elementów w porównywanych zbiorach,
   b) układa obiekty (np. patyczki) w serie rosnące i malejące, numeruje je; wybiera obiekt w takiej serii, określa następne i poprzednie,
   c) klasyfikuje obiekty: tworzy kolekcje np. zwierzęta, zabawki, rzeczy do ubrania,
   d) w sytuacjach trudnych i wymagających wysiłku intelektualnego zachowuje się rozumnie, dąży do wykonania zadania,
   e) wyprowadza kierunki od siebie i innych osób; określa położenie obiektów względem obranego obiektu; orientuje się na kartce papieru, aby odnajdować informacje (np. w lewym górnym rogu) i rysować strzałki we właściwym kierunku,
   f) dostrzega symetrię (np. w rysunku motyla); zauważa, że jedna figura jest powiększeniem lub pomniejszeniem drugiej; kontynuuje regularny wzór (np. szlaczek);
2) w zakresie liczenia i sprawności rachunkowych:
   a) sprawnie liczy obiekty (dostrzega regularności dziesiątkowego systemu liczenia), wymienia kolejne liczebniki od wybranej liczby, także wspak (zakres do 20); zapisuje liczby cyframi (zakres do 10),
   b) wyznacza sumy (dodaje) i różnice (odejmuje), manipulując obiektami lub rachując na zbiorach zastępczych, np. na palcach; sprawnie dodaje i odejmuje w zakresie do 10, poprawnie zapisuje te działania,
   c) radzi sobie w sytuacjach życiowych, których pomyślne zakończenie wymaga dodawania lub odejmowania,
   d) zapisuje rozwiązanie zadania z treścią przedstawionego słownie w konkretnej sytuacji, stosując zapis cyfrowy i znaki działań;
3) w zakresie pomiaru:
   a) długości: mierzy długość, posługując się np. linijką; porównuje długości obiektów,
   b) ciężaru: potrafi ważyć przedmioty; różnicuje przedmioty cięższe, lżejsze; wie, że towar w sklepie jest pakowany według wagi,

c) płynów: odmierza płyny kubkiem i miarką litrową,
d) czasu: nazywa dni w tygodniu i miesiące w roku; orientuje się, do czego służy kalendarz, i potrafi z niego korzystać; rozpoznaje czas na zegarze w takim zakresie, który pozwala mu orientować się w ramach czasowych szkolnych zajęć i domowych obowiązków;

4) w zakresie obliczeń pieniężnych:
   a) zna będące w obiegu monety i banknot o wartości 10 zł; zna wartość nabywczą monet i radzi sobie w sytuacji kupna i sprzedaży,
   b) zna pojęcie długu i konieczność spłacenia go.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe na koniec klasy III szkoły podstawowej

Edukacja matematyczna. Uczeń kończący klasę III:

1) liczy (w przód i w tył) od danej liczby po 1, dziesiątkami od danej liczby w zakresie 100 i setkami od danej liczby w zakresie 1000;
2) zapisuje cyframi i odczytuje liczby w zakresie 1000;
3) porównuje dowolne dwie liczby w zakresie 1000 (słownie i z użyciem znaków <, >, =);
4) dodaje i odejmuje liczby w zakresie 100 (bez algorytmów działań pisemnych); sprawdza wyniki odejmowania za pomocą dodawania;
5) podaje z pamięci iloczyny w zakresie tabliczki mnożenia; sprawdza wyniki dzielenia za pomocą mnożenia;
6) rozwiązuje łatwe równania jednodziałaniowe z niewiadomą w postaci okienka (bez przenoszenia na drugą stronę);
7) rozwiązuje zadania tekstowe wymagające wykonania jednego działania (w tym zadania na porównywanie różnicowe, ale bez porównywania ilorazowego);
8) wykonuje łatwe obliczenia pieniężne (cena, ilość, wartość) i radzi sobie w sytuacjach codziennych wymagających takich umiejętności;
9) mierzy i zapisuje wynik pomiaru długości, szerokości i wysokości przedmiotów oraz odległości; posługuje się jednostkami: milimetr, centymetr, metr; wykonuje łatwe obliczenia dotyczące tych miar (bez zamiany jednostek i wyrażeń dwumianowanych w obliczeniach formalnych); używa pojęcia kilometr w sytuacjach życiowych, np. jechaliśmy autobusem 27 kilometrów (bez zamiany na metry);
10) waży przedmioty, używając określeń: kilogram, pół kilograma, dekagram, gram; wykonuje łatwe obliczenia, używając tych miar (bez zamiany jednostek i bez wyrażeń dwumianowanych w obliczeniach formalnych);
11) odmierza płyny różnymi miarkami; używa określeń: litr, pół litra, ćwierć litra;

12) odczytuje temperaturę (bez konieczności posługiwania się liczbami ujemnymi, np. 5 stopni mrozu, 3 stopnie poniżej zera);
13) odczytuje i zapisuje liczby w systemie rzymskim od I do XII;
14) podaje i zapisuje daty; zna kolejność dni tygodnia i miesięcy; porządkuje chronologicznie daty; wykonuje obliczenia kalendarzowe w sytuacjach życiowych;
15) odczytuje wskazania zegarów: w systemach: 12- i 24-godzinnym, wyświetlających cyfry i ze wskazówkami; posługuje się pojęciami: godzina, pół godziny, kwadrans, minuta; wykonuje proste obliczenia zegarowe (pełne godziny);
16) rozpoznaje i nazywa koła, kwadraty, prostokąty i trójkąty (również nietypowe, położone w różny sposób oraz w sytuacji, gdy figury zachodzą na siebie); rysuje odcinki o podanej długości; oblicza obwody trójkątów, kwadratów i prostokątów (w centymetrach);
17) rysuje drugą połowę figury symetrycznej; rysuje figury w powiększeniu i pomniejszeniu; kontynuuje regularność w prostych motywach (np. szlaczki, rozety).

ZALECANE WARUNKI I SPOSÓB REALIZACJI

Edukacja matematyczna. W pierwszych miesiącach nauki w centrum uwagi jest wspomaganie rozwoju czynności umysłowych ważnych dla uczenia się matematyki. Dominującą formą zajęć są w tym czasie zabawy, gry i sytuacje zadaniowe, w których dzieci manipulują specjalnie dobranymi przedmiotami, np. liczmanami. Następnie dba się o budowanie w umysłach dzieci pojęć liczbowych i sprawności rachunkowych na sposób szkolny. Dzieci mogą korzystać z zeszytów ćwiczeń najwyżej przez jedną czwartą czasu przeznaczonego na edukację matematyczną. Przy układaniu i rozwiązywaniu zadań trzeba zadbać o wstępną matematyzację: dzieci rozwiązują zadania matematyczne, manipulując przedmiotami lub obiektami zastępczymi, potem zapisują rozwiązanie.

PODSTAWA PROGRAMOWA PRZEDMIOTU *MATEMATYKA*

II etap edukacyjny: klasy IV–VI

Cele kształcenia – wymagania ogólne

I. Sprawność rachunkowa.

Uczeń wykonuje proste działania pamięciowe na liczbach naturalnych, całkowitych i ułamkach, zna i stosuje algorytmy działań pisemnych oraz potrafi wykorzystać te umiejętności w sytuacjach praktycznych.

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.

Uczeń interpretuje i przetwarza informacje tekstowe, liczbowe, graficzne, rozumie i interpretuje odpowiednie pojęcia matematyczne, zna podstawową terminologię, formułuje odpowiedzi i prawidłowo zapisuje wyniki.

III. Modelowanie matematyczne.

Uczeń dobiera odpowiedni model matematyczny do prostej sytuacji, stosuje poznane wzory i zależności, przetwarza tekst zadania na działania arytmetyczne i proste równania.

IV. Rozumowanie i tworzenie strategii.

Uczeń prowadzi proste rozumowanie składające się z niewielkiej liczby kroków, ustala kolejność czynności (w tym obliczeń) prowadzących do rozwiązania problemu, potrafi wyciągnąć wnioski z kilku informacji podanych w różnej postaci.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

1. Liczby naturalne w dziesiątkowym układzie pozycyjnym. Uczeń:
   1) odczytuje i zapisuje liczby naturalne wielocyfrowe;
   2) interpretuje liczby naturalne na osi liczbowej;
   3) porównuje liczby naturalne;
   4) zaokrągla liczby naturalne;
   5) liczby w zakresie do 30 zapisane w systemie rzymskim przedstawia w systemie dziesiątkowym, a zapisane w systemie dziesiątkowym przedstawia w systemie rzymskim.
2. Działania na liczbach naturalnych. Uczeń:
   1) dodaje i odejmuje w pamięci liczby naturalne dwucyfrowe, liczby wielocyfrowe w przypadkach, takich jak np. 230 + 80 lub 4600 – 1200; liczbę jednocyfrową dodaje do dowolnej liczby naturalnej i odejmuje od dowolnej liczby naturalnej;
   2) dodaje i odejmuje liczby naturalne wielocyfrowe pisemnie, a także za pomocą kalkulatora;

3) mnoży i dzieli liczbę naturalną przez liczbę naturalną jednocyfrową, dwucyfrową lub trzycyfrową pisemnie, w pamięci (w najprostszych przykładach) i za pomocą kalkulatora (w trudniejszych przykładach);
4) wykonuje dzielenie z resztą liczb naturalnych;
5) stosuje wygodne dla niego sposoby ułatwiające obliczenia, w tym przemienność i łączność dodawania i mnożenia;
6) porównuje różnicowo i ilorazowo liczby naturalne;
7) rozpoznaje liczby naturalne podzielne przez 2, 3, 5, 9, 10, 100;
8) rozpoznaje liczbę złożoną, gdy jest ona jednocyfrowa lub dwucyfrowa, a także, gdy na istnienie dzielnika wskazuje poznana cecha podzielności;
9) rozkłada liczby dwucyfrowe na czynniki pierwsze;
10) oblicza kwadraty i sześciany liczb naturalnych;
11) stosuje reguły dotyczące kolejności wykonywania działań;
12) szacuje wyniki działań.

3. Liczby całkowite. Uczeń:
   1) podaje praktyczne przykłady stosowania liczb ujemnych;
   2) interpretuje liczby całkowite na osi liczbowej;
   3) oblicza wartość bezwzględną;
   4) porównuje liczby całkowite;
   5) wykonuje proste rachunki pamięciowe na liczbach całkowitych.

4. Ułamki zwykłe i dziesiętne. Uczeń:
   1) opisuje część danej całości za pomocą ułamka;
   2) przedstawia ułamek jako iloraz liczb naturalnych, a iloraz liczb naturalnych jako ułamek;
   3) skraca i rozszerza ułamki zwykłe;
   4) sprowadza ułamki zwykłe do wspólnego mianownika;
   5) przedstawia ułamki niewłaściwe w postaci liczby mieszanej i odwrotnie;
   6) zapisuje wyrażenia dwumianowane w postaci ułamka dziesiętnego i odwrotnie;
   7) zaznacza ułamki zwykłe i dziesiętne na osi liczbowej oraz odczytuje ułamki zwykłe i dziesiętne zaznaczone na osi liczbowej;
   8) zapisuje ułamek dziesiętny skończony w postaci ułamka zwykłego;
   9) zamienia ułamki zwykłe o mianownikach będących dzielnikami liczb 10, 100, 1000 itd. na ułamki dziesiętne skończone dowolną metodą (przez rozszerzanie ułamków zwykłych, dzielenie licznika przez mianownik w pamięci, pisemnie lub za pomocą kalkulatora);

10) zapisuje ułamki zwykłe o mianownikach innych niż wymienione w pkt 9 w postaci rozwinięcia dziesiętnego nieskończonego (z użyciem trzech kropek po ostatniej cyfrze), dzieląc licznik przez mianownik w pamięci, pisemnie lub za pomocą kalkulatora;
11) zaokrągla ułamki dziesiętne;
12) porównuje ułamki (zwykłe i dziesiętne).

5. Działania na ułamkach zwykłych i dziesiętnych. Uczeń:
   1) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli ułamki zwykłe o mianownikach jedno- lub dwucyfrowych, a także liczby mieszane;
   2) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli ułamki dziesiętne w pamięci (w najprostszych przykładach), pisemnie i za pomocą kalkulatora (w trudniejszych przykładach);
   3) wykonuje nieskomplikowane rachunki, w których występują jednocześnie ułamki zwykłe i dziesiętne;
   4) porównuje różnicowo ułamki;
   5) oblicza ułamek danej liczby naturalnej;
   6) oblicza kwadraty i sześciany ułamków zwykłych i dziesiętnych oraz liczb mieszanych;
   7) oblicza wartości prostych wyrażeń arytmetycznych, stosując reguły dotyczące kolejności wykonywania działań;
   8) wykonuje działania na ułamkach dziesiętnych, używając własnych, poprawnych strategii lub z pomocą kalkulatora;
   9) szacuje wyniki działań.

6. Elementy algebry. Uczeń:
   1) korzysta z nieskomplikowanych wzorów, w których występują oznaczenia literowe, zamienia wzór na formę słowną;
   2) stosuje oznaczenia literowe nieznanych wielkości liczbowych i zapisuje proste wyrażenie algebraiczne na podstawie informacji osadzonych w kontekście praktycznym;
   3) rozwiązuje równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą występującą po jednej stronie równania (poprzez zgadywanie, dopełnianie lub wykonanie działania odwrotnego).

7. Proste i odcinki. Uczeń:
   1) rozpoznaje i nazywa figury: punkt, prosta, półprosta, odcinek;
   2) rozpoznaje odcinki i proste prostopadłe i równoległe;
   3) rysuje pary odcinków prostopadłych i równoległych;
   4) mierzy długość odcinka z dokładnością do 1 milimetra;
   5) wie, że aby znaleźć odległość punktu od prostej, należy znaleźć długość odpowiedniego odcinka prostopadłego.

8. Kąty. Uczeń:
   1) wskazuje w kątach ramiona i wierzchołek;
   2) mierzy kąty mniejsze od 180 stopni z dokładnością do 1 stopnia;
   3) rysuje kąt o mierze mniejszej niż 180 stopni;
   4) rozpoznaje kąt prosty, ostry i rozwarty;
   5) porównuje kąty;
   6) rozpoznaje kąty wierzchołkowe i kąty przyległe oraz korzysta z ich własności.
9. Wielokąty, koła, okręgi. Uczeń:
   1) rozpoznaje i nazywa trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne, równoboczne i równoramienne;
   2) konstruuje trójkąt o trzech danych bokach; ustala możliwość zbudowania trójkąta (na podstawie nierówności trójkąta);
   3) stosuje twierdzenie o sumie kątów trójkąta;
   4) rozpoznaje i nazywa kwadrat, prostokąt, romb, równoległobok, trapez;
   5) zna najważniejsze własności kwadratu, prostokąta, rombu, równoległoboku, trapezu;
   6) wskazuje na rysunku, a także rysuje cięciwę, średnicę, promień koła i okręgu.
10. Bryły. Uczeń:
   1) rozpoznaje graniastosłupy proste, ostrosłupy, walce, stożki i kule w sytuacjach praktycznych i wskazuje te bryły wśród innych modeli brył;
   2) wskazuje wśród graniastosłupów prostopadłościany i sześciany i uzasadnia swój wybór;
   3) rozpoznaje siatki graniastosłupów prostych i ostrosłupów;
   4) rysuje siatki prostopadłościanów.
11. Obliczenia w geometrii. Uczeń:
   1) oblicza obwód wielokąta o danych długościach boków;
   2) oblicza pola: kwadratu, prostokąta, rombu, równoległoboku, trójkąta, trapezu przedstawionych na rysunku (w tym na własnym rysunku pomocniczym) oraz w sytuacjach praktycznych;
   3) stosuje jednostki pola: m^2, cm^2, km^2, mm^2, dm^2, ar, hektar (bez zamiany jednostek w trakcie obliczeń);
   4) oblicza objętość i pole powierzchni prostopadłościanu przy danych długościach krawędzi;
   5) stosuje jednostki objętości i pojemności: litr, mililitr, dm^3, m^3, cm^3, mm^3;
   6) oblicza miary kątów, stosując przy tym poznane własności kątów i wielokątów.

12. Obliczenia praktyczne. Uczeń:

    1) interpretuje 100% danej wielkości jako całość, 50% – jako połowę, 25% − jako jedną czwartą, 10% – jako jedną dziesiątą, a 1% – jako setną część danej wielkości liczbowej;
    2) w przypadkach osadzonych w kontekście praktycznym oblicza procent danej wielkości w stopniu trudności typu 50%, 10%, 20%;
    3) wykonuje proste obliczenia zegarowe na godzinach, minutach i sekundach;
    4) wykonuje proste obliczenia kalendarzowe na dniach, tygodniach, miesiącach, latach;
    5) odczytuje temperaturę (dodatnią i ujemną);
    6) zamienia i prawidłowo stosuje jednostki długości: metr, centymetr, decymetr, milimetr, kilometr;
    7) zamienia i prawidłowo stosuje jednostki masy: gram, kilogram, dekagram, tona;
    8) oblicza rzeczywistą długość odcinka, gdy dana jest jego długość w skali, oraz długość odcinka w skali, gdy dana jest jego rzeczywista długość;
    9) w sytuacji praktycznej oblicza: drogę przy danej prędkości i danym czasie, prędkość przy danej drodze i danym czasie, czas przy danej drodze i danej prędkości; stosuje jednostki prędkości: km/h, m/s.

13. Elementy statystyki opisowej. Uczeń:

    1) gromadzi i porządkuje dane;
    2) odczytuje i interpretuje dane przedstawione w tekstach, tabelach, diagramach i na wykresach.

14. Zadania tekstowe. Uczeń:

    1) czyta ze zrozumieniem prosty tekst zawierający informacje liczbowe;
    2) wykonuje wstępne czynności ułatwiające rozwiązanie zadania, w tym rysunek pomocniczy lub wygodne dla niego zapisanie informacji i danych z treści zadania;
    3) dostrzega zależności między podanymi informacjami;
    4) dzieli rozwiązanie zadania na etapy, stosując własne, poprawne, wygodne dla niego strategie rozwiązania;
    5) do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym stosuje poznaną wiedzę z zakresu arytmetyki i geometrii oraz nabyte umiejętności rachunkowe, a także własne poprawne metody;
    6) weryfikuje wynik zadania tekstowego, oceniając sensowność rozwiązania.

ZALECANE WARUNKI I SPOSÓB REALIZACJI

Zadaniem szkoły jest podwyższenie poziomu umiejętności matematycznych uczniów. Należy zwrócić szczególną uwagę na następujące kwestie:

1) czynny udział w zdobywaniu wiedzy matematycznej przybliża dziecko do matematyki, rozwija kreatywność, umożliwia samodzielne odkrywanie związków i zależności; duże możliwości samodzielnych obserwacji i działań stwarza geometria, ale także w arytmetyce można znaleźć obszary, gdzie uczeń może czuć się odkrywcą;
2) znajomość algorytmów działań pisemnych jest konieczna, ale w praktyce codziennej działania pisemne są wypierane przez kalkulator; należy postarać się o to, by matematyka była dla ucznia przyjazna, nie odstraszała przesadnie skomplikowanymi i żmudnymi rachunkami, których trudność jest sztuką samą dla siebie i nie prowadzi do głębszego zrozumienia zagadnienia;
3) umiejętność wykonywania działań pamięciowych ułatwia orientację w świecie liczb, weryfikację wyników różnych obliczeń, w tym na kalkulatorze, a także szacowanie wyników działań rachunkowych; samo zaś szacowanie jest umiejętnością wyjątkowo praktyczną w życiu codziennym;
4) nie powinno się oczekiwać od ucznia powtarzania wyuczonych regułek i precyzyjnych definicji; należy dbać o poprawność języka matematycznego, uczyć dokładnych sformułowań, ale nie oczekiwać, że przyniesie to natychmiastowe rezultaty; dopuszczenie pewnej swobody wypowiedzi bardziej otworzy dziecko, zdecydowanie wyraźniej pokaże stopień zrozumienia zagadnienia;
5) przy rozwiązywaniu zadań tekstowych szczególnie wyraźnie widać, jak uczeń rozumuje, jak rozumie tekst zawierający informacje liczbowe, jaką tworzy strategię rozwiązania; należy akceptować wszelkie poprawne strategie i dopuszczać stosowanie przez ucznia jego własnych, w miarę czytelnych, zapisów rozwiązania.

Uwzględniając zróżnicowane potrzeby edukacyjne uczniów, szkoła organizuje zajęcia zwiększające szanse edukacyjne uczniów zdolnych oraz uczniów mających trudności w nauce matematyki.

PODSTAWA PROGRAMOWA PRZEDMIOTU *MATEMATYKA*

III etap edukacyjny

Cele kształcenia – wymagania ogólne

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.

Uczeń interpretuje i tworzy teksty o charakterze matematycznym, używa języka matematycznego do opisu rozumowania i uzyskanych wyników.

II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.

Uczeń używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych, interpretuje pojęcia matematyczne i operuje obiektami matematycznymi.

III. Modelowanie matematyczne.

Uczeń dobiera model matematyczny do prostej sytuacji, buduje model matematyczny danej sytuacji.

IV. Użycie i tworzenie strategii.

Uczeń stosuje strategię jasno wynikającą z treści zadania, tworzy strategię rozwiązania problemu.

V. Rozumowanie i argumentacja.

Uczeń prowadzi proste rozumowania, podaje argumenty uzasadniające poprawność rozumowania.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
   1) odczytuje i zapisuje liczby naturalne dodatnie w systemie rzymskim (w zakresie do 3000);
   2) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli liczby wymierne zapisane w postaci ułamków zwykłych lub rozwinięć dziesiętnych skończonych zgodnie z własną strategią obliczeń (także z wykorzystaniem kalkulatora);
   3) zamienia ułamki zwykłe na ułamki dziesiętne (także okresowe), zamienia ułamki dziesiętne skończone na ułamki zwykłe;
   4) zaokrągla rozwinięcia dziesiętne liczb;
   5) oblicza wartości nieskomplikowanych wyrażeń arytmetycznych zawierających ułamki zwykłe i dziesiętne;
   6) szacuje wartości wyrażeń arytmetycznych;
   7) stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, w tym do zamiany jednostek (jednostek prędkości, gęstości itp.).

2. Liczby wymierne (dodatnie i niedodatnie). Uczeń:
   1) interpretuje liczby wymierne na osi liczbowej. Oblicza odległość między dwiema liczbami na osi liczbowej;
   2) wskazuje na osi liczbowej zbiór liczb spełniających warunek typu: $x \geq 3$, $x < 5$;
   3) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli liczby wymierne;
   4) oblicza wartości nieskomplikowanych wyrażeń arytmetycznych zawierających liczby wymierne.
3. Potęgi. Uczeń:
   1) oblicza potęgi liczb wymiernych o wykładnikach naturalnych;
   2) zapisuje w postaci jednej potęgi: iloczyny i ilorazy potęg o takich samych podstawach, iloczyny i ilorazy potęg o takich samych wykładnikach oraz potęgę potęgi (przy wykładnikach naturalnych);
   3) porównuje potęgi o różnych wykładnikach naturalnych i takich samych podstawach oraz porównuje potęgi o takich samych wykładnikach naturalnych i różnych dodatnich podstawach;
   4) zamienia potęgi o wykładnikach całkowitych ujemnych na odpowiednie potęgi o wykładnikach naturalnych;
   5) zapisuje liczby w notacji wykładniczej, tzn. w postaci $a \cdot 10^k$, gdzie $1 \leq a < 10$ oraz k jest liczbą całkowitą.
4. Pierwiastki. Uczeń:
   1) oblicza wartości pierwiastków drugiego i trzeciego stopnia z liczb, które są odpowiednio kwadratami lub sześcianami liczb wymiernych;
   2) wyłącza czynnik przed znak pierwiastka oraz włącza czynnik pod znak pierwiastka;
   3) mnoży i dzieli pierwiastki drugiego stopnia;
   4) mnoży i dzieli pierwiastki trzeciego stopnia.
5. Procenty. Uczeń:
   1) przedstawia część pewnej wielkości jako procent lub promil tej wielkości i odwrotnie;
   2) oblicza procent danej liczby;
   3) oblicza liczbę na podstawie danego jej procentu;
   4) stosuje obliczenia procentowe do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, np. oblicza ceny po podwyżce lub obniżce o dany procent, wykonuje obliczenia związane z VAT, oblicza odsetki dla lokaty rocznej.
6. Wyrażenia algebraiczne. Uczeń:
   1) opisuje za pomocą wyrażeń algebraicznych związki między różnymi wielkościami;

2) oblicza wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych;
3) redukuje wyrazy podobne w sumie algebraicznej;
4) dodaje i odejmuje sumy algebraiczne;
5) mnoży jednomiany, mnoży sumę algebraiczną przez jednomian oraz, w nietrudnych przykładach, mnoży sumy algebraiczne;
6) wyłącza wspólny czynnik z wyrazów sumy algebraicznej poza nawias;
7) wyznacza wskazaną wielkość z podanych wzorów, w tym geometrycznych i fizycznych.

7. Równania. Uczeń:
   1) zapisuje związki między wielkościami za pomocą równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, w tym związki między wielkościami wprost proporcjonalnymi i odwrotnie proporcjonalnymi;
   2) sprawdza, czy dana liczba spełnia równanie stopnia pierwszego z jedną niewiadomą;
   3) rozwiązuje równania stopnia pierwszego z jedną niewiadomą;
   4) zapisuje związki między nieznanymi wielkościami za pomocą układu dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi;
   5) sprawdza, czy dana para liczb spełnia układ dwóch równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi;
   6) rozwiązuje układy równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi;
   7) za pomocą równań lub układów równań opisuje i rozwiązuje zadania osadzone w kontekście praktycznym.

8. Wykresy funkcji. Uczeń:
   1) zaznacza w układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty o danych współrzędnych;
   2) odczytuje współrzędne danych punktów;
   3) odczytuje z wykresu funkcji: wartość funkcji dla danego argumentu, argumenty dla danej wartości funkcji, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, dla jakich ujemne, a dla jakich zero;
   4) odczytuje i interpretuje informacje przedstawione za pomocą wykresów funkcji (w tym wykresów opisujących zjawiska występujące w przyrodzie, gospodarce, życiu codziennym);
   5) oblicza wartości funkcji podanych nieskomplikowanym wzorem i zaznacza punkty należące do jej wykresu.

9. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa. Uczeń:
   1) interpretuje dane przedstawione za pomocą tabel, diagramów słupkowych i kołowych, wykresów;

2) wyszukuje, selekcjonuje i porządkuje informacje z dostępnych źródeł;
3) przedstawia dane w tabeli, za pomocą diagramu słupkowego lub kołowego;
4) wyznacza średnią arytmetyczną i medianę zestawu danych;
5) analizuje proste doświadczenia losowe (np. rzut kostką, rzut monetą, wyciąganie losu) i określa prawdopodobieństwa najprostszych zdarzeń w tych doświadczeniach (prawdopodobieństwo wypadnięcia orła w rzucie monetą, dwójki lub szóstki w rzucie kostką, itp.).

10. Figury płaskie. Uczeń:

1) korzysta ze związków między kątami utworzonymi przez prostą przecinającą dwie proste równoległe;
2) rozpoznaje wzajemne położenie prostej i okręgu, rozpoznaje styczną do okręgu;
3) korzysta z faktu, że styczna do okręgu jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności;
4) rozpoznaje kąty środkowe;
5) oblicza długość okręgu i łuku okręgu;
6) oblicza pole koła, pierścienia kołowego, wycinka kołowego;
7) stosuje twierdzenie Pitagorasa;
8) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i w trapezach;
9) oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów;
10) zamienia jednostki pola;
11) oblicza wymiary wielokąta powiększonego lub pomniejszonego w danej skali;
12) oblicza stosunek pól wielokątów podobnych;
13) rozpoznaje wielokąty przystające i podobne;
14) stosuje cechy przystawania trójkątów;
15) korzysta z własności trójkątów prostokątnych podobnych;
16) rozpoznaje pary figur symetrycznych względem prostej i względem punktu. Rysuje pary figur symetrycznych;
17) rozpoznaje figury, które mają oś symetrii, i figury, które mają środek symetrii. Wskazuje oś symetrii i środek symetrii figury;
18) rozpoznaje symetralną odcinka i dwusieczną kąta;
19) konstruuje symetralną odcinka i dwusieczną kąta;
20) konstruuje kąty o miarach 60°, 30°, 45°;
21) konstruuje okrąg opisany na trójkącie oraz okrąg wpisany w trójkąt;
22) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności.

11. Bryły. Uczeń:

1) rozpoznaje graniastosłupy i ostrosłupy prawidłowe;
2) oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym);
3) zamienia jednostki objętości.

ZALECANE WARUNKI I SPOSÓB REALIZACJI

Uwzględniając zróżnicowane potrzeby edukacyjne uczniów, szkoła organizuje zajęcia zwiększające szanse edukacyjne dla uczniów mających trudności w nauce matematyki oraz dla uczniów, którzy mają szczególne zdolności matematyczne.

W przypadku uczniów zdolnych, można wymagać większego zakresu umiejętności, jednakże wskazane jest podwyższanie stopnia trudności zadań, a nie poszerzanie tematyki.

PODSTAWA PROGRAMOWA PRZEDMIOTU *MATEMATYKA*

IV etap edukacyjny

Cele kształcenia – wymagania ogólne

ZAKRES PODSTAWOWY	ZAKRES ROZSZERZONY
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	
Uczeń interpretuje tekst matematyczny. Po rozwiązaniu zadania interpretuje otrzymany wynik.	Uczeń używa języka matematycznego do opisu rozumowania i uzyskanych wyników.
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	
Uczeń używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.	Uczeń rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne oraz operuje obiektami matematycznymi.
III. Modelowanie matematyczne.	
Uczeń dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.	Uczeń buduje model matematyczny danej sytuacji, uwzględniając ograniczenia i zastrzeżenia.
IV. Użycie i tworzenie strategii.	
Uczeń stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania.	Uczeń tworzy strategię rozwiązania problemu.
V. Rozumowanie i argumentacja.	
Uczeń prowadzi proste rozumowanie, składające się z niewielkiej liczby kroków.	Uczeń tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

ZAKRES PODSTAWOWY	ZAKRES ROZSZERZONY
1. Liczby rzeczywiste. Uczeń:	
1) przedstawia liczby rzeczywiste w różnych postaciach (np. ułamka zwykłego, ułamka dziesiętnego okresowego, z użyciem symboli pierwiastków, potęg); 2) oblicza wartości wyrażeń arytmetycznych (wymiernych); 3) posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach;	spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 1) wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną, zaznacza na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności typu: $\|x-a\| = b$, $\|x-a\| < b$, $\|x-a\| \geq b$, 2) stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu.

ZAKRES PODSTAWOWY	ZAKRES ROZSZERZONY
4) oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych; 5) wykorzystuje podstawowe własności potęg (również w zagadnieniach związanych z innymi dziedzinami wiedzy, np. fizyką, chemią, informatyką); 6) wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym; 7) oblicza błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia; 8) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej; 9) wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok).	
2. Wyrażenia algebraiczne. Uczeń:	
1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.	spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$; 2) dzieli wielomiany przez dwumian $ax + b$; 3) rozkłada wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłączając wspólny czynnik przed nawias; 4) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany; 5) wyznacza dziedzinę prostego wyrażenia wymiernego z jedną zmienną, w którym w mianowniku występują tylko wyrażenia dające się łatwo sprowadzić do iloczynu wielomianów liniowych i kwadratowych;

ZAKRES PODSTAWOWY	ZAKRES ROZSZERZONY
	6) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne; rozszerza i (w łatwych przykładach) skraca wyrażenia wymierne
3. Równania i nierówności. Uczeń:	
1) sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności; 2) wykorzystuje interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi; 3) rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą; 4) rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą; 5) rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą; 6) korzysta z definicji pierwiastka do rozwiązywania równań typu $x^3 = -8$; 7) korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7) = 0$; 8) rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np. $\frac{x+1}{x+3} = 2$, $\frac{x+1}{x} = 2x$.	spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 1) stosuje wzory Viète'a; 2) rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem; 3) rozwiązuje układy równań, prowadzące do równań kwadratowych; 4) stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$; 5) stosuje twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych; 6) rozwiązuje równania wielomianowe dające się łatwo sprowadzić do równań kwadratowych; 7) rozwiązuje łatwe nierówności wielomianowe; 8) rozwiązuje proste nierówności wymierne typu: $\frac{x+1}{x+3} > 2$, $\frac{x+3}{x^2-16} < \frac{2x}{x^2-4x}$ $\frac{3x-2}{4x-7} \leq \frac{1-3x}{5-4x}$ 9) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o poziomie trudności nie wyższym, niż: $\lvert\lvert x+1\rvert-2\rvert=3$, $\lvert x+3\rvert+\lvert x-5\rvert>12$.

ZAKRES PODSTAWOWY	ZAKRES ROZSZERZONY
4. Funkcje. Uczeń:	
1) określa funkcje za pomocą wzoru, tabeli, wykresu, opisu słownego; 2) oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu. Posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość; 3) odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą); 4) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$; 5) rysuje wykres funkcji liniowej, korzystając z jej wzoru; 6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie; 7) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej; 8) szkicuje wykres funkcji kwadratowej, korzystając z jej wzoru; 9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie; 10) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje);	spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 1) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = \|f(x)\|$, $y = c \cdot f(x)$, $y = f(cx)$; 2) szkicuje wykresy funkcji logarytmicznych dla różnych podstaw; 3) posługuje się funkcjami logarytmicznymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym; 4) szkicuje wykres funkcji określonej w różnych przedziałach różnymi wzorami; odczytuje własności takiej funkcji z wykresu.

ZAKRES PODSTAWOWY	ZAKRES ROZSZERZONY
11) wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym; 12) wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym); 13) szkicuje wykres funkcji $f(x) = a/x$ dla danego a, korzysta ze wzoru i wykresu tej funkcji do interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi; 14) szkicuje wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw; 15) posługuje się funkcjami wykładniczymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym.	
5. Ciągi. Uczeń	
1) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym; 2) bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny; 3) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego; 4) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.	spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 1) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem rekurencyjnym; 2) oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $1/n$, $1/n^2$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów; 3) rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy.
6. Trygonometria. Uczeń:	
1) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180°; 2) korzysta z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych	spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 1) stosuje miarę łukową, zamienia miarę łukową kąta na stopniową i odwrotnie;

ZAKRES PODSTAWOWY	ZAKRES ROZSZERZONY
(odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora); 3) oblicza miarę kąta ostrego, dla której funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (miarę dokładną albo – korzystając z tablic lub kalkulatora – przybliżoną); 4) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ oraz $\sin (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$; 5) znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego.	2) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens dowolnego kąta o mierze wyrażonej w stopniach lub radianach (przez sprowadzenie do przypadku kąta ostrego); 3) wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych; 4) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych (np. gdy rozwiązuje nierówności typu $\sin x > a$, $\cos x \leq a$, $\operatorname{tg} x > a$); 5) stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów; 6) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne typu $\sin 2x = ½$, $\sin 2x + \cos x = 1$, $\sin x + \cos x = 1$, $\cos 2x < ½$.
7. Planimetria. Uczeń:	
1) stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym; 2) korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych; 3) rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów; 4) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi.	spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 1) stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu; 2) stosuje twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa do obliczania długości odcinków i ustalania równoległości prostych; 3) znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych w jednokładności (odcinka, trójkąta, czworokąta itp.); 4) rozpoznaje figury podobne i jednokładne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności;

ZAKRES PODSTAWOWY	ZAKRES ROZSZERZONY
	5) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.
8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Uczeń:	
1) wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej); 2) bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych; 3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt; 4) oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych; 5) wyznacza współrzędne środka odcinka; 6) oblicza odległość dwóch punktów; 7) znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych (punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta itp.) w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu.	spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 1) interpretuje graficznie nierówność liniową z dwiema niewiadomymi oraz układy takich nierówności; 2) bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań ogólnych; 3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci ogólnej i przechodzi przez dany punkt; 4) oblicza odległość punktu od prostej; 5) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ oraz opisuje koła za pomocą nierówności; 6) wyznacza punkty wspólne prostej i okręgu; 7) oblicza współrzędne oraz długość wektora; dodaje i odejmuje wektory oraz mnoży je przez liczbę. Interpretuje geometrycznie działania na wektorach; 8) stosuje wektory do opisu przesunięcia wykresu funkcji.
9. Stereometria. Uczeń:	
1) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi, itp.), oblicza miary tych kątów;	spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 1) określa, jaką figurą jest dany przekrój sfery płaszczyzną;

ZAKRES PODSTAWOWY	ZAKRES ROZSZERZONY
2) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), oblicza miary tych kątów; 3) rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), oblicza miary tych kątów; 4) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami; 5) określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną; 6) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.	2) określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną.
10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Uczeń:	
1) oblicza średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje te parametry dla danych empirycznych; 2) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania; 3) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.	spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 1) wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych; 2) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe; 3) korzysta z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.

ZAKRES PODSTAWOWY	ZAKRES ROZSZERZONY
11. Rachunek różniczkowy. Uczeń:	
	1) oblicza granice funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych; 2) oblicza pochodne funkcji wymiernych; 3) korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej; 4) korzysta z własności pochodnej do wyznaczenia przedziałów monotoniczności funkcji; 5) znajduje ekstrema funkcji wielomianowych i wymiernych; 6) stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.

ZALECANE WARUNKI I SPOSÓB REALIZACJI

Uwzględniając zróżnicowane potrzeby edukacyjne uczniów, szkoła organizuje zajęcia zwiększające szanse edukacyjne dla uczniów mających trudności w nauce matematyki oraz dla uczniów, którzy mają szczególne zdolności matematyczne.

W przypadku uczniów zdolnych, można wymagać większego zakresu umiejętności, jednakże wskazane jest podwyższanie stopnia trudności zadań, a nie poszerzanie tematyki.

KOMENTARZ DO PODSTAWY PROGRAMOWEJ PRZEDMIOTU *MATEMATYKA*

Zbigniew Semadeni, Marcin Karpiński, Krystyna Sawicka, Marta Jucewicz, Anna Dubiecka, Wojciech Guzicki, Edward Tutaj

Spis treści

Dlaczego w 2008 r. zmieniono podstawę programową z matematyki?

Przyczyn zmian jest wiele. Wymienimy najważniejsze:

1) znaczny wzrost zainteresowania szkołami ogólnokształcącymi po 1999 r.,

2) wprowadzenie obowiązkowej matury z matematyki od 2010 r.,

3) obniżenie wieku szkolnego.

Matematyka jest w tej szczególnej sytuacji, że istotnej korekty podstawy programowej tego przedmiotu dokonano już w sierpniu 2007 roku. Bezpośrednią przyczyną była decyzja o obowiązkowej maturze z matematyki i związana z tym konieczność modyfikacji podstawy programowej. Ponadto, antycypując rychłe obniżenie wieku szkolnego, przesunięto część materiału z klas I–III do IV–VI i z klas IV–VI do gimnazjum. Teraz te ówczesne zmiany zostały dopracowane i ulepszone.

Jaka jest struktura edukacji matematycznej w nowej podstawie?

Matematyka, choć kontynuowana aż do matury, będzie nauczana w sposób zróżnicowany: część uczniów zdecyduje się na naukę w zakresie podstawowym, a pozostali w zakresie rozszerzonym, w znacznie zwiększonej liczbie godzin.

Pomimo niezbędnego podziału edukacji na kolejne etapy, należy podkreślić koncepcyjną spójność całej edukacji matematycznej. Podstawę programową wychowania przedszkolnego i nauczania początkowego opracowywał ten sam zespół i obie pomyślane zostały jako jedna całość. Również pewne osoby pracowały zarówno nad podstawą programową dla klas I–III, jak i nad podstawą programową matematyki dla klas IV–VI i dalszych. W efekcie stanowią one konsekwentny ciąg, od przedszkola po maturę.

Autorzy i wydawcy będą musieli zwracać uwagę, by podręcznik dla pierwszej klasy nowego etapu edukacyjnego (a więc dla klasy IV, dla I klasy gimnazjum i dla I klasy liceum) był nie tylko zgodny z podstawą programową danego etapu edukacyjnego, ale też z podstawą etapu poprzedniego, tzn. by podręcznik nie zakładał u uczniów żadnej wcześniejszej wiedzy, której nie ma w podstawie. Również nauczyciel klasy rozpoczynającej kolejny etap edukacji powinien znać podstawę dla poprzedniego etapu (np. nauczyciel klasy IV powinien dobrze wiedzieć, czego podstawa wymaga od ucznia kończącego klasę III) i odpowiednio do tego dostosować nauczanie.

Czym odróżniają się w podstawie wymagania ogólne od wymagań szczegółowych?

Wymagania ogólne to synteza, na wyższym poziomie ogólności, najważniejszych celów kształcenia.

W przypadku gimnazjum i liceum (dla zakresu podstawowego i dla zakresu rozszerzonego) wyróżniono 5 wymagań ogólnych:

– Wykorzystanie i tworzenie informacji.
– Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.
– Modelowanie matematyczne.
– Użycie i tworzenie strategii.
– Rozumowanie i argumentacja.

MEN, zatwierdzając podręcznik, będzie wymagać nie tylko, by zawierał wymagane treści, ale też by dawał nauczycielowi narzędzie do realizacji postulowanych celów ogólnych.

Wymagania szczegółowe to treści nauczania sformułowane jako oczekiwane umiejętności. W praktyce szkolnej na te wymagania nauczyciel zwraca największą uwagę.

Nie używa się jednak słowa „umie" przy każdym wymaganiu. Pisze się np. „mierzy długość", co należy interpretować jako umiejętność wykonania danej czynności – umysłowej lub manualnej – wymienionej w podstawie.

Ponadto podstawa zawiera zadania szkoły na danym etapie edukacyjnym, dotyczące realizacji tych wymagań przez szkołę.

Czytając wymagania szczegółowe, należy pamiętać o dwóch zasadach, które przyjęto przy ich redagowaniu:

(I) Jeżeli jakieś wymaganie znajduje się w podstawie dla etapu n, to automatycznie jest też wymagane na etapie $n+1$ i następnych.

(II) Jeżeli jakieś wymaganie znajduje się w podstawach dla etapu $n+1$, to automatycznie wynika stąd, że nie jest to wymagane na etapie n.

Nie wynika stąd bynajmniej, że nauczyciel nie ma powtarzać materiału. Powtórki są niezbędne, ale żaden temat nie ma być omawiany na wyższym etapie jeszcze raz od początku.

Ponadto, interpretując dowolne sformułowanie z podstawy, należy stosować też zasadę:

(III) Jeżeli w podstawie zapisane jest wymaganie A, to również wymaga się wszystkiego, co w oczywisty sposób jest niezbędne dla A.

Nie obejmuje to jednak uogólnień pojęć wykorzystywanych w A, ani bloku wiedzy teoretycznej z nimi związanej.

Na przykład w wymaganiach po klasie VI czytamy: *oblicza rzeczywistą długość odcinka, gdy dana jest jego długość w skali.* Sformułowane jest to w postaci czynności, której sensownego wykonania oczekuje się od ucznia. Ma on przy tym praktycznie rozumieć sens skali, ale bez jakiejś ogólnej teorii.

Podobnie wymaganie po gimnazjum: *stosuje twierdzenie Pitagorasa* obejmuje znajomość samego twierdzenia i umiejętność jego stosowania.

W słowach *konstruuje okrąg opisany na trójkącie* mieści się też znajomość pojęcia okręgu opisanego na trójkącie i rozumienie sensu tej konstrukcji. Nie wymaga się natomiast ani uzasadnienia poprawności tej konstrukcji, ani ogólnego pojęcia konstrukcji z pomocą cyrkla i linijki. Oczywiście, na lekcji poświęconej temu tematowi powiedziane będzie znacznie więcej, ale na egzaminie wymagać się będzie jedynie umiejętności sensownego wykonania tej konstrukcji.

Normalnie wszyscy nauczyciele interesują się głównie wymaganiami szczegółowymi; wymagania ogólne są traktowane jedynie jako pewien dodatek, dodatek ważny, ale wiele osób nie uważa tego za coś istotnego. Jednakże podręcznik powinien dostarczyć nauczycielowi narzędzi do realizacji również celów ogólnych (tę cechę podręcznika rzeczoznawca MEN też powinien uwzględnić, a jeśli oceni ją negatywnie, powinien zakwestionować podręcznik).

Oto najważniejsze umiejętności, jakich oczekuje się od ucznia, rozwijanych przez cały okres szkolny. Wśród nich, obok umiejętności czytania, jest też myślenie matematyczne, właśnie myślenie, nie tylko wykonywanie obliczeń czy pamiętanie wzorów. A także myślenie naukowe w fizyce, w biologii, w naukach społecznych.

Dlaczego część wymagań w podstawie opisana jest bardzo szczegółowo?

Podstawa z 1999 r. określała zakres treści nauczania w sposób dość ogólny. Doświadczenie lat ubiegłych pokazało jednak wyraźnie, że ogólnikowe hasło często prowadziło do zawyżania wymagań, zwłaszcza w przypadku młodszych uczniów.

Dlatego wymagania w nowej podstawie są sformułowane tak dokładnie, jak to było możliwe, nieraz nawet przesadnie szczegółowo po to, aby przez precyzyjne określenie treści chronić ucznia przez interpretacją zawyżającą wymagania, by m.in. próbować ograniczać tendencję do zbyt trudnych podręczników. Nie zawsze jednak udało się to zrobić, czasem użyte są nieostre wyrażenia, np. ,,w łatwych przypadkach".

Dlaczego w podstawie mówi się o tym, co uczeń potrafi, a nie akcentuje się tego, że ma też rozumieć wymagane pojęcia?

Słowo „rozumie" jest za mało precyzyjne, można bowiem podkładać pod nie przeróżne interpretacje. Na przykład, postuluje się, by uczeń po klasie III rozumiał pojęcie liczby (domyślne: naturalnej, bo innych nie zna). Postuluje się też, że maturzysta ma rozumieć pojęcie liczby naturalnej. Jest oczywiste, że chodzi o dwa zupełnie różne, nieporównywalne poziomy rozumienia. Ponadto wszelkie próby ustalenia, czy uczeń rozumie dane pojęcie, jeśli nie prowadzi tego profesjonalnie przygotowany psycholog, grożą sprawdzaniem jedynie werbalnej wiedzy, wymaganiem od ucznia teoretycznych sformułowań, definicji, wyuczonych formułek.

Z tego powodu o tym, czy uczeń należycie rozumie dane pojęcie (na swoim poziomie wiekowym), ma się wnioskować pośrednio z tego, czy poprawnie i z sensem wykonuje określone w podstawie programowej czynności.

Edukacja matematyczna w nowej klasie I szkoły podstawowej

W nauczaniu początkowym wymagania po I klasie są zbliżone do tego, czego dotąd oczekiwało się od dziecka pod koniec przedszkola lub klasy zerowej i są dostosowane do naturalnego rozwoju dziecka. Klasa I została osobno wyodrębniona w podstawie po to, aby chronić dzieci przed potencjalnie zawyżonymi wymaganiami, które mogłyby się pojawić gdyby znane były jedynie wymagania po klasie III.

To, czego oczekuje się od przyszłego 7-latka kończącego klasę I, podzielone zostało na grupy tematyczne. Jedna z nich dotyczy czynności umysłowych ważnych dla uczenia się matematyki, z których na specjalną uwagę zasługuje wymóg: uczeń ustala równoliczność mimo obserwowanych zmian w układzie elementów w porównywanych zbiorach. Sformułowanie to nawiązuje do znanych trudności dzieci na przełomie przedszkola i szkoły, które można zdiagnozować następująco. Dziecku najpierw pokazuje się dwa rządki po 10 żetonów, wyglądające identyczne:

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

● ● ● ● ● ● ● ● ● ●

Pada pytanie, czy czarnych kółek jest tyle samo co białych. Dziecko odpowiada, że tak; wolno mu przy tym liczyć kółka. Następnie osoba badająca zakłóca wzrokową oczywistość tej równości, np. rozsuwa elementy jednego z rządków

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

● ● ● ● ● ● ● ● ● ●

i ponawia pytanie. Dzieci starsze są pewne, że po tej zmianie nadal jest tyle samo czarnych żetonów co białych. Takie przekonanie, zwane stałością liczby, jest fundamentem, na którym opiera się większość szkolnych rozumowań arytmetycznych. Natomiast dzieci 5-letnie, spora część 6-latków, a nawet jeszcze niektóre 7-latki sądzą, że teraz czarnych kółek jest więcej, nawet jeśli przed chwilą je liczyły i stwierdziły, że jest ich po 10. Co więcej, słowne wyjaśnienia okazują się nieskuteczne. Niezbędne jest zbieranie doświadczeń przy przeliczaniu przedmiotów w różnych sytuacjach, co skutkuje na ogół dopiero po wielu miesiącach.

W każdym razie od 6-latków nie powinno się wymagać niczego, do czego niezbędne jest rozumienie stałości liczby. Nie powinno się też wymagać żadnych operacji umysłowych niewywodzących się ze zrozumiałych dla dzieci czynności na konkretach. Opisane tu wymaganie stałości liczby dotyczy 7-latków po rocznym uczęszczaniu do klasy I.

Jakie zmiany są niezbędne przy obniżaniu wieku szkolnego?

Matematyczne wymagania dotyczące 6-latków są opracowane na miarę dzieci w tym wieku. Potrzebne jest wyposażenie sal w pomoce dydaktyczne i przedmioty potrzebne do zajęć (np. liczmany), gry i zabawki dydaktyczne. W pierwszych miesiącach nauki kluczowe jest wspomaganie rozwoju czynności umysłowych ważnych dla uczenia się matematyki. Dominującą formą zajęć mają w tym czasie być zabawy, gry i sytuacje zadaniowe, w których dzieci manipulują specjalnie dobranymi przedmiotami, np. żetonami. Następnie dopiero można na tym budować w umysłach dzieci pojęcia liczbowe i sprawności rachunkowe na sposób szkolny.

W podstawie podkreśla się, że dzieci mogą korzystać z zeszytów ćwiczeń najwyżej przez jedną czwartą czasu przeznaczonego na edukację matematyczną. Wzięło się to stąd, że wypełnianie wydrukowanych zeszytów ćwiczeń stało się plagą w wielu polskich szkołach. Zamiast ćwiczeń z konkretami, zamiast rachunku pamięciowego i stosowania matematyki do zagadnień interesujących dzieci, mają wpisywać liczby i wyrazy w okienka lub miejsca wykropkowane. Zeszyty ćwiczeń zastąpiły przy tym tradycyjne zeszyty w kratkę. Dzieci, czasem nawet w II klasie, nie wiedzą, jak pisać na pustej stronie, że mają zacząć od góry strony, od lewej. Wielu znakomitych nauczycieli jest dziś zdania, że zwykłe zeszyty w kratkę powinny – oprócz innych środków – być używane w nauczaniu, oczywiście w umiarkowanym zakresie.

Wymagania stawiane uczniom kończącym klasę III szkoły podstawowej

W pierwszym przybliżeniu odpowiadają temu, czego dotąd spodziewano od ucznia po II klasie. Wymienimy najistotniejsze umiejętności, które pozwolą wstępnie zorientować się w zakresie wiedzy, jakiej powinien oczekiwać nauczyciel klasy IV.

Uczeń ma dodawać i odejmować liczby w zakresie 100 (bez algorytmów działań pisemnych) i sprawdzać wyniki odejmowania za pomocą dodawania. Oczekuje się, że dodawanie liczby jednocyfrowej do dowolnej dwucyfrowej uczeń będzie w stanie wykonać w głowie i podobnie odejmowanie liczby jednocyfrowej od dwucyfrowej. Natomiast w przypadku, gdy obie dane liczby są dwucyfrowe, uczeń powinien poradzić sobie, pomagając sobie ewentualnie wykonywaniem czynności np. na zabawowych pieniądzach.

Po III klasie uczeń ma mieć opanowaną tabliczkę mnożenia. Sformułowane jest to następująco: *podaje z pamięci iloczyny w zakresie tabliczki mnożenia.* Zawiera się w tym również rozumienie sensu mnożenia, oczywiście rozumienie na miarę ucznia klasy III. Nie ma natomiast w podstawie analogicznego wymogu *podaje z pamięci ilorazy w zakresie tabliczki mnożenia,* nie miałoby bowiem sensu zmuszanie ucznia do uczenia się tych ilorazów na pamięć. Oczekuje się natomiast, że uczeń potrafi sprawdzić wyniki dzielenia za pomocą mnożenia, co wymaga rozumienia sensu dzielenia i jego związku z mnożeniem, umie wykorzystać znajomość tabliczki mnożenia do wyszukania potrzebnego ilorazu. Na przykład, aby znaleźć iloraz 48:6, uczeń powinien pomyśleć: przez jaką liczbę należy pomnożyć 6, aby otrzymać 48? Przeszukując w pamięci iloczyny liczby 6, natrafi na $6 \cdot 8 = 48$, skąd już powinien wiedzieć, że $48 : 6 = 8$.

Uczeń rozwiązuje zadania tekstowe wymagające wykonania jednego działania (w tym zadania na porównywanie różnicowe, ale bez porównywania ilorazowego).

Problem skoku edukacyjnego między klasą III i klasą IV

Nauczanie *matematyki* stanowi jedną całość i dlatego należy zmniejszać dystans dzielący klasy IV–VI od klas I–III. Skok między nauczaniem początkowym a zupełnie innym stylem nauczania prowadzonym przez nauczycieli-przedmiotowców zawsze był wstrząsem dla dzieci. Teraz należy pamiętać, że do nowej klasy IV będą chodzić dzieci w wieku obecnej klasy III; materiał klasy IV powinien więc, w pierwszym przybliżeniu, odpowiadać dotychczasowemu materiałowi klasy III.

Jednak problemem jest nie tylko zakres materiału. Trudności dzieci mogą być spotęgowane przez to, że nauczyciele mający wyższe wykształcenie matematyczne, którzy nigdy nie pracowali z dziećmi 9-letnimi, uczeni na studiach metodyki nastawionej na starszych uczniów, mogą nie być w pełni świadomi różnic rozwoju umysłowego między 9-latkiem a 10-latkiem. Konieczne będzie wolniejsze tempo pracy w IV klasie niż dotąd, mniej abstrakcji, a więcej konkretnych czynności takich, jak rozcinanie kół na początku nauki o ułamkach (na początek rozcinanie nożyczkami, a nie jedynie w myśli!) i wiele innych elementów dotychczasowej klasy III. W 2007 roku MEN przesunął do klas IV–VI wszystkie trudne tematy dotychczasowej klasy III; w nowej podstawie jeszcze bardziej uwzględniono obniżenie wieku dzieci.

Nauczanie matematyki stanowi jedną całość i należy starać się zmniejszać dystans dzielący klasy IV–VI od klas I–III. Skok między nauczaniem początkowym, a zupełnie innym stylem nauczania prowadzonym przez nauczycieli-przedmiotowców zawsze był wstrząsem dla dzieci. Teraz należy pamiętać, że do nowej klasy IV będą chodzić dzieci w wieku obecnej klasy III; materiał klasy IV powinien więc, w pierwszym przybliżeniu, odpowiadać dotychczasowemu materiałowi klasy III.

Np. wielu matematyków nie zdaje sobie sprawy z tego, jak bardzo porównywanie ilorazowe (w tym zadania typu: „Ile razy więcej?") jest trudne dla uczniów. Przyczyn trudności jest wiele, tu wymienimy tylko jedną. Pytanie, ile razy jedna liczba bądź wielkość jest większa od drugiej, to wstęp do stosunków i proporcji, a więc do tematów, z którymi kłopoty mają jeszcze uczniowie klasy VI i gimnazjum. Zwrot „3 razy więcej" oznacza stosunek 3:1, a także 300%. Te trzy określenia znaczą to samo, choć są wypowiedziane w różny sposób.

Uczeń klas I–III poznaje najpierw dzielenie jedynie w kontekście rozdzielenia czegoś na części po tyle samo. Gdy pytamy, ile razy A jest większe od B, nie rozdzielamy przecież niczego na równe części. Dzielenie interpretowane jako stosunek to zupełnie nowe pojęcie, kształtujące się u ucznia przez wiele lat. Uczenie tego dzieci 9-letnich byłoby przedwczesne, dlatego przeniesione zostało to do klas IV–VI, gdzie trzeba poświęcić temu należycie wiele uwagi.

Podstawa programowa zakłada ograniczenie nauczania encyklopedycznego i większy nacisk na rozumienie, a nie na zapamiętywanie. Nie powinno się, szczególnie na poziomie szkoły podstawowej, oczekiwać od ucznia powtarzania wyuczonych regułek i precyzyjnych definicji. Należy oczywiście dbać o poprawność języka matematycznego, uczyć dokładności wypowiedzi, ale zarazem pozwalać uczniom na ich własne sformułowania. Dopuszczenie pewnej swobody wypowiedzi bardziej otworzy dziecko, zdecydowanie wyraźniej pokaże stopień zrozumienia zagadnienia.

Czynny udział w zdobywaniu wiedzy matematycznej przybliża dziecko do matematyki, rozwija kreatywność, umożliwia samodzielne odkrywanie związków i zależności. Duże możliwości do samodzielnych obserwacji i działań stwarza geometria, ale i w arytmetyce można znaleźć obszary, gdzie uczeń może czuć się odkrywcą. Ważne jest zarazem przygotowanie do rachunków codziennych, pozaszkolnych.

Jakie tematy przeszły z dawnej klasy III do nowej klasy IV?

Tematów tych jest wiele:
– zapis cyfrowy liczb do 10000,
– algorytmy dodawania i odejmowania pisemnego,
– mnożenie i dzielenie liczb wielocyfrowych przez jednocyfrowe,
– dzielenie z resztą (gdy dzielnik i wynik są jednocyfrowe),
– reguły kolejności wykonywania działań;
– porównanie ilorazowe,
– ułamki,
– kilometr jako 1000 metrów,
– punkt, prosta, łamana,
– odcinki prostopadłe i równoległe,
– plan i skala
– obliczenia zegarowe z minutami.

W jakim zakresie oczekuje się opanowania rachunku pamięciowego?

Należy kłaść odpowiedni nacisk na obliczenia pamięciowe, na utrwalenie rachunku pamięciowego z klasy III i rozszerzenie jego zakresu. Dopiero na tym etapie edukacyjnym można oczekiwać od ucznia umiejętności wykonywania działań, których wynik (a także składnik, czynnik lub dzielna) wykracza poza liczbę 100, czyli np. 327 + 60, 306 : 3.

Obliczenia pamięciowe pozwalają uczniowi na większą swobodę w wyborze sposobu obliczenia niż zmechanizowane stosowanie algorytmów działań pisemnych. Słowo „pamięciowe” nie wyklucza oczywiście zapisywania wyników; można także okazjonalnie pomagać sobie, coś pisząc.

Umiejętność wykonywania działań pamięciowych ułatwia orientację w świecie liczb, weryfikację wyników różnych obliczeń, w tym dokonywanych na kalkulatorze.

Dodawanie pamięciowe dotyczy liczb jedno- i dwucyfrowych oraz łatwych przypadków większych liczb, np. 70 + 60, 4300 +1200.

Pamięciowe mnożenie dotyczy iloczynów liczb dwucyfrowych przez jednocyfrowe. Oczekuje się umiejętności pamięciowego mnożenia również w łatwych przypadkach takich jak 240 razy 300, ale nie obejmuje to obliczania w pamięci iloczynu np. 25 razy 23.

Dzielenie w pamięci dotyczy jedynie działań najprostszych typu: 120 : 4; 500 : 250; 3200 : 80 itp.

W jakim stopniu wymagać algorytmów działań pisemnych, a w jakim kalkulatora?

Znajomość algorytmów działań pisemnych jest konieczna, ale w codziennej praktyce działania pisemne są wypierane przez kalkulator. Trzeba starać się o to, by matematyka była dla ucznia przyjazna, nie odstraszała przesadnie skomplikowanymi i żmudnymi rachunkami, których trudność jest sztuką samą dla siebie i nie prowadzi do głębszego zrozumienia zagadnienia. Uczeń powinien umieć użyć kalkulatora we wszystkich sytuacjach, gdzie to jest naturalne lub pozwala lepiej zrozumieć obliczenie. M.in. kalkulator pozwala szybko obliczać kwadraty i sześciany różnych liczb i obserwować wyniki.

Mnożenie i dzielenie pisemne dotyczy przede wszystkim obliczania iloczynów i ilorazów liczb naturalnych przez liczby jedno i dwucyfrowe, ewentualnie liczb o większej liczbie cyfr, ale kończących się zerami, a więc działań nie trudniejszych niż np. 367 razy 430 lub 86400 : 240. W przypadku liczb wielocyfrowych o większej liczbie cyfr różnych od zera mnożenie i dzielenie jest działaniem nużącym i czasochłonnym, lepiej więc wykonywać je za pomocą kalkulatora.

Co uczeń ma wiedzieć o przemienności i łączności?

Uczeń nie musi znać słów: przemienność i łączność ani, tym bardziej, nie musi znać na pamięć słownego opisu praw dotyczących tych własności. Ma wiedzieć, że np. przy mnożeniu można zmienić kolejność czynników i powinien umieć stosować takie własności do ułatwiania sobie obliczeń.

W jakim zakresie uczeń ma opanować porównywanie ilorazowe i porównywanie różnicowe?

Porównywanie ilorazowe ze swej natury dotyczy tylko liczb dodatnich; w klasach IV–VI wymaga się stosowania go jedynie w zakresie liczb naturalnych. Natomiast uczeń ma stosować porównywanie różnicowe również w odniesieniu do ułamków.

Uczeń powinien wiedzieć, jakie działanie należy wykonać, by odpowiedzieć na cztery podstawowe typy pytań związanych z porównaniem różnicowym i porównaniem ilorazowym: O ile większa/mniejsza jest jedna liczba od drugiej? Ile razy jest większa lub mniejsza? Jaka liczba jest o 5 większa/mniejsza od danej? Jaka liczba jest 5 razy większa/mniejsza od danej? Uczniowie powinni też umiejętnie stosować porównywanie różnicowe i ilorazowe przy zwrotach typu: dłuższy, cięższy, starszy, wyższy i odwrotnych (krótszy, lżejszy itd.)

Co uczeń powinien wiedzieć o kolejności wykonywania działań?

Reguły te należy ćwiczyć na prostych przykładach, najpierw w sytuacji dwóch działań (np. dodawanie z mnożeniem). Unikać należy podawania długiej listy, na której zestawia się wszystkie reguły w jednym, wieloczłonowym sformułowaniu. Nie wolno dopuszczać do powstania w umysłach uczniów błędnej (choć ostatnio często spotykanej) reguły „Najpierw wykonuje się działania w nawiasach, a potem wykonuje się działania w kolejności: mnożenie, dzielenie, dodawanie, odejmowanie"; należy na prostych przykładach wskazywać uczniom fałszywość tej reguły. Uczniowie powinni poznawać zasady rządzące kolejnością działań raczej przez rozwiązywanie coraz bardziej złożonych przykładów niż przez zapamiętywanie teoretycznych regułek.

W bardziej skomplikowanym przypadku lepiej jest użyć zbędnego nawiasu dla ułatwienia uczniowi uchwycenia struktury danego wyrażenia. Wstawianie dodatkowego nawiasu, gdy nie zmienia to wartości wyrażenia, a może ułatwić obliczenia lub podkreślić prawidłową kolejność działań, powinno być akceptowane, a nawet zalecane. Jeśli uczeń na przykład wstawi nawias w działaniu $44 + 8 \cdot 12 - 10$ i zapisze to wyrażenie jako $44 + (8 \cdot 12) - 10$, należy uznać ten zapis za prawidłowy. Warto nawet czasem zachęcać uczniów do takiego sposobu ułatwiania sobie obliczeń.

Jak należy rozumieć wymóg: „uczeń szacuje wyniki działań"?

Szacowanie przybliżonego wyniku bez konieczności dokładnego wykonania obliczeń jest umiejętnością o szczególnym znaczeniu w życiu codziennym, np. robiąc zakupy w sklepie, powinno się z grubsza wiedzieć, ile trzeba będzie zapłacić. Szczególnie ważna jest umiejętność szacowania przy korzystaniu z kalkulatora, aby w przypadku omyłkowego naciśnięcia niewłaściwego klawisza zauważyć, że otrzymany wynik jest niemożliwy.

Uczeń powinien w nietrudnych przypadkach umieć – bez wykonania działania – porównać oczekiwany wynik z daną liczbą lub stwierdzić, czy zawiera się w danym przedziale liczbowym. Sposoby szacowania zależą od sytuacji. Można porównywać składniki (czynniki, odjemną i odjemnik itd.) z innymi liczbami lub korzystać z nabytych doświadczeń arytmetycznych. Oto dwa przykładowe szacowania:

a) szacowanie sumy $38 + 73$ – skoro 38 jest większe od 30, a 73 większe od 70, więc $38 + 73$ jest większe od 100; ponadto 38 jest mniejsze od 40, a 73 jest mniejsze od 80, więc $38 + 73$ jest mniejsze od 120;
b) szacowanie ilorazu $468 : 9$ – ponieważ $450 : 9 = 50$, więc $468 : 9$ musi być większe od 50;

c) 68 razy 41 – ponieważ 68 to prawie 70, a 41 to trochę więcej niż 40, więc $68 \cdot 41$ musi być bliskie iloczynowi $70 \cdot 40$, czyli 2800.

Dlaczego uczeń ma poznać zapis rzymski jedynie w zakresie do 30?

Zapis ten uczeń powinien umiejętnie stosować w kontekście praktycznym. W klasach I–III stosuje go do określania miesięcy, więc wystarczy zakres do XII, natomiast w klasach IV–VI potrzebny jest również do zapisu stuleci. W dotychczasowej praktyce szkolnej zapisu rzymskiego nauczano w klasie IV. To okazało się zdecydowanie za wcześnie, by uczniowie skutecznie i trwale opanowali umiejętność posługiwania się wszystkimi cyframi rzymskimi. Tym bardziej będzie to przedwczesne, gdy do szkoły podstawowej trafią dzieci o rok młodsze. Naukę posługiwania się większymi od XXX liczbami w zapisie rzymskim przeniesiono do gimnazjum.

Liczby całkowite i działania na nich

Uczeń ma intuicyjnie rozumieć sens liczb ujemnych i ich znaczenie w życiu. Ma umieć wykonać działania na liczbach całkowitych w łatwych przypadkach, tzn. takich, w których obliczenie daje się wykonać w pamięci. W nowej podstawie dla klas IV–VI liczby całkowite wyraźnie oddzielone zostały od ułamków. Nie wymaga się żadnych obliczeń, w których pojawiałyby się liczby ujemne razem z ułamkami. Nazwa „liczba wymierna" w ogóle się nie pojawia w podstawie dla szkoły podstawowej (będzie dopiero w gimnazjum).

Chodzi o to, aby nie wymagać od ucznia wykonywania działań, w których pojawiają się ułamki ze znakiem minus. Wielu matematyków ongiś wierzyło, że ponieważ zasady dotyczące działań na liczbach ujemnych są takie same dla liczb całkowitych i dla ułamków, więc dydaktycznie nie ma między nimi istotnej różnicy. Różnica jednak jest i to bardzo istotna. Ogólne zasady są rzeczywiście takie same, ale obliczenia, w których uczeń musi dać sobie radę z kumulacją trudności: minusy i kreski ułamkowe, okazują się znacznie trudniejsze.

Obliczanie bezwzględnej wartości liczb

Pojęcie to figuruje wśród wymagań po klasie VI w sformułowaniu: uczeń oblicza wartość bezwzględną liczby całkowitej. W szkole podstawowej wystarczy, że uczeń zna to pojęcie w przypadku konkretnych liczb całkowitych, np. wie, że. $|-5| = 5$, $|5| = 5$, $|0| = 0$. Po prostu ma wiedzieć, że jeśli w zapisie liczby przed cyframi jest minus, to bezwzględną wartość tej liczby oblicza się, opuszczając ten znak. Ponieważ ma umieć interpretować liczby całkowite na osi, powinien też wiedzieć, że na osi odległość punktu –5 od punktu 0 równa się 5.

Z bezwzględną wartością wyrażeń zawierających symbole literowe uczniowie spotkają się dopiero w liceum i to jedynie w zakresie rozszerzonym.

Jak ma być wstępnie kształtowane pojęcie ułamka?

Ważnym typem konkretnych sytuacji, na których opiera się pojęcie ułamka, są figury geometryczne podzielone na pewną liczbę części uważanych za równe, bowiem są przystające. Ograniczamy się więc do figur mających jakąś oczywistą symetrię. Ułamek typu n/m określa w tym ujęciu ilościowo, jaka część figury powstała przez podział jej na m części i wzięcie n takich części. Z uwagi na przyszłe obniżenie wieku uczniów w klasach IV–VI, wstępne zajęcia przygotowujące pojęcie ułamka powinny rozpocząć się od rozcinania (nożyczkami itp.) konkretnych figur, ich zginania, przekładania itp.

Uczeń powinien m.in. umieć stwierdzić, jaką część figury zamalowano i zapisać to za pomocą ułamka, a także umieć zamalować część figury odpowiadającą danemu ułamkowi. W tym ujęciu n/m nie jest ilorazem liczby n przez liczbę m, jest to iloczyn n razy $1/m$. Później pojawiają się też pytania dotyczące miar, np. jaką częścią metra jest centymetr.

Ułamek jako iloraz jest pojęciem trudniejszym. Pojawia się w zadaniach typu „3 jabłka podzielić między 4 osoby" lub „2 litry soku rozdzielić na 3 równe części". Są to jednak interpretacje istotnie różne od poprzednich i wymagają odpowiednich zabiegów dydaktycznych.

Ważnym środkiem kształtowania pojęcia ułamka jest zaznaczanie ułamków na osi liczbowej. Ułamek określający położenie punktu między 0 a 1 jest dla ucznia zupełnie nowym doświadczeniem, istotnie różnym zarówno od pokolorowanej części figury jak i od ilorazu. Wymaga to podzielenia przedziału [0,1] na równe części. Ułamek np. ⅔ zmienia swój sens. Przestaje być miarą danej części przedziału, staje się współrzędną jednego punktu. Na osi liczbowej powinna być wygodna i odpowiednio dopasowana jednostka (gdy przedział ma np. długość 6 cm, to łatwo podzielić go na 3, 6 i 12 części); wskazane jest, by uczeń sam umiał taką jednostkę dobrać do danego zadania.

Co w podstawie rozumie się przez termin „ułamek dziesiętny"?

Przez ułamek dziesiętny (w razie wątpliwości z dodaniem słowa: „skończony") rozumie się wyrażenie postaci np. 0,2 bądź 3,29. Uczeń ma umieć zapisać taki ułamek w postaci ułamka zwykłego 2/10 bądź 329/100, a także dokonywać zamiany odwrotnej. Łatwiejszych zamian ułamków zwykłych o mianownikach 2, 5, 10, 20 itd. (tzn. będących dzielnikami liczb 10, 100, 1000 itd.) na ułamki dziesiętne uczeń może dokonać dowolną metodą (przez rozszerzanie ułamków zwykłych, dzielenie licznika przez mianownik w pamięci, pisemnie lub za pomocą kalkulatora). Jakkolwiek trudniejsze zamiany uczeń może, a nawet powinien, wykonywać za pomocą kalkulatora, oczekuje się, że ułamki typu 1/2, 3/4, 2/5 będzie zamieniał w pamięci, a także nie będzie używał kalkulatora do znalezienia rozwinięcia dziesiętnego ułamków typu 1/3, 4/9.

Działania na ułamkach

Uczeń ma umieć wykonać cztery działania arytmetyczne na ułamkach zwykłych o mianownikach jedno- lub dwucyfrowych, a także na liczbach mieszanych, jednakże obliczenia, które uczeń ma wykonywać, nie powinny być trudne. Ich celem powinno być zrozumienie stosowanych metod i osiągnięcie praktycznych umiejętności rachunkowych, bez zbędnych utrudnień.

Rachunek pamięciowy na ułamkach dziesiętnych powinien dotyczyć przykładów tak prostych, by nie opłacało się stosować algorytmów ani kalkulatora, np. 0,64 + 0,3; 0,72 – 0,5; 0,2 razy 0,4; 0,42 podzielone przez 0,6.

Rachunek pisemny dotyczy przede wszystkim ułamków dziesiętnych, z których co najmniej jeden ma najwyżej dwie cyfry znaczące, np. 32,4 razy 0,072; 0,064 : 0,25. W trudniejszych rachunkowo przykładach wskazane jest korzystanie z kalkulatora.

Obliczenia, w których występują jednocześnie ułamki zwykłe i dziesiętne, uczeń powinien wykonać jedynie w przypadkach niewymagających żmudnych zamian jednej postaci ułamka na drugą, a więc nie trudniejszych niż 3,75 + 4½; 3,6 · 12/3; 2¼ : 1,2 itp. Celem tych obliczeń powinno być raczej nabycie umiejętności wyboru odpowiedniej zamiany i uświadomienie uczniom wielopostaciowości liczby, niż ćwiczenie skomplikowanych obliczeń.

Uczeń ma porównywać różnicowo ułamki (np. o ile ½ jest większa od ⅓). Jedynie w niektórych przypadkach uczeń może także porównywać ilorazowo ułamki dziesiętne lub zwykłe (na przykład, stwierdzając, że liczba 2,4 jest dwa razy mniejsza niż liczba 4,8), jednakże najczęściej porównywanie ilorazowe ułamków jest niecelowe, a bywa absurdalne.

Zbyt skomplikowane obliczenia wielodziałaniowe zniechęcają wielu uczniów, dlatego należy ich unikać. Wprawdzie niektórzy uczniowie lubią takie wyzwania i im można dać możliwość rozwiązywania trudniejszych przykładów, ale powinno się traktować to nadprogramowo. Nie należy oczekiwać od każdego ucznia umiejętności obliczania wartości wyrażenia arytmetycznego, w którym jest do wykonania wiele czynności przygotowawczych (zamiana ułamka dziesiętnego na zwykły i odwrotnie, sprowadzanie do wspólnego mianownika, zamiana na ułamek niewłaściwy) i których nagromadzenie gubi ciągłość obliczeń. Należy też akceptować różne sposoby ułatwiania sobie rozwiązania (np. obliczenia cząstkowe na marginesie) pod warunkiem, że uczeń dba o poprawność całego zapisu.

Podobnie jak w przypadku liczb naturalnych można oczekiwać, że uczeń potrafi bez wykonania działania oszacować jego wynik. Powinien na przykład spostrzec, że 0,647 + 0,478 jest większe od 1, ponieważ, dodając same tylko części dziesiąte, otrzymujemy 1.

Dlaczego nie ma ogólnego pojęcia procentu w podstawie dla szkoły podstawowej?

Procenty usunięto ze szkoły podstawowej w 2007 r., bowiem w wielu szkołach uczono tego w zbyt trudny, abstrakcyjny sposób i efektem tego było jedynie mechaniczne opanowywanie reguł. Biorąc pod uwagę, że po obniżeniu wieku uczniów klasa VI będzie odpowiadać dotychczasowej klasie V, te dwa powody zadecydowały w 2007 r., że cały dział o procentach przesunięto do gimnazjum.

Wiele osób ubolewało z tego powodu. Argumentowano – słusznie – że uczeń po szkole podstawowej powinien co najmniej wiedzieć, co to jest 50% czy np. 20%. Obecnie procenty znów umieszczono w nowej podstawie dla klas IV–VI, ale starając się zarazem, aby ograniczyć wymagania stawiane uczniom. Przyjęto następujące sformułowanie:

Uczeń interpretuje 100% danej wielkości jako całość, 50% – jako połowę, 25% — jako jedną czwartą, 10% – jako jedną dziesiątą, a 1% – jako setną część pewnej wielkości liczbowej;

w przypadkach osadzonych w kontekście praktycznym oblicza procent danej wielkości, w stopniu trudności typu 50%, 10%, 20%.

Ponadto znajduje się to nie w dziale „Działania na ułamkach zwykłych i dziesiętnych", lecz w dziale „Obliczenia praktyczne", co ma podkreślić, że nie chodzi tu o wiedzę ogólną, teoretyczną.

Nauczyciele wypowiadający się o obecnym projekcie wyrażali zaniepokojenie, że nie będzie się w szkole obliczać np. 19% czegoś. Przecież procenty powinny być objaśnione ogólnie. W klasie na lekcjach oczywiście można robić takie obliczenia. Z zapisu w podstawie wynika jedynie, że nie powinno być takich trudniejszych procentów na sprawdzianie po VI klasie. Autor podręcznika umieszczający takie zadanie powinien wyraźnie zaznaczyć, że w klasach IV–VI jest to materiał nadobowiązkowy.

Oczekuje się, że uczeń będzie dobrze wiedział, że 50% to połowa, np. będzie wiedział, że 50% z kwoty 240 zł to połowa tej kwoty, czyli 120 zł, a 10% kwoty 240 zł to 24 zł. Niestety nieraz bywało tak, że na pytanie, ile to jest 50% z kwoty np. 240 zł, uczeń obliczał 50 razy 240 dzielone przez 100, stosując ogólną regułę, której się wyuczył. Nie jest konieczne, by uczeń szkoły podstawowej umiał obliczyć 19% kwoty 240 zł, ale powinien być świadom tego, że to trochę mniej niż 20% tej kwoty, a zatem jest to trochę mniej niż 48 zł.

Stereotypowe jest mniemanie, że na lekcjach matematyki uczeń ma poznawać ogólne metody, a nie ich jakieś szczególne przypadki. Często to jest słuszne, ale w wielu też przypadkach przyczynia się do przedwczesnego, pamięciowego opanowywania zbyt trudnych reguł. Tak było m.in. z procentami. Uczeń kończący szkołę podstawową nie musi jeszcze znać określenia procentu, powinien tylko umieć przetłumaczyć sobie informacje podane w języku procentów na informacje o ułamkach i to tylko dla łatwych procentów typu 100%, 50%, 25%, 10% i w przykładach osadzonych w kontekście praktycznym. Należy zdecydowanie unikać algorytmizacji obliczeń procentowych. Uczeń ma mieć niewielki, ale dobrze ugruntowany zakres intuicji dotyczących procentów. W gimnazjum te intuicje będą ugruntowane, rozszerzone i usystematyzowane.

Czy w podstawie dla szkoły podstawowej jest algebra?

W klasach IV–VI mamy pewne elementy algebry, ujęte możliwie praktycznie. Uczeń ma umieć korzystać z nieskomplikowanych wzorów z oznaczeniami literowymi (np. ze wzoru $P = \frac{1}{2} ah$ na pole trójkąta) i – co ważniejsze – ma umieć zamieniać je na formę słowną, tak aby wzór był dla niego skrótowym zapisem schematu postępowania: „jedna druga podstawy razy wysokość".

Pojęcie „wyrażenie algebraiczne" występuje z konieczności jako hasło w podstawie, jednak uczeń poznaje te wyrażenia w praktyce, bez próby wyjaśniania, co ogólnie rozumie się pod tą nazwą. Uczeń ma wykonywać proste obliczenia związane z podstawianiem do danego wzoru. Powinien także umieć opisać taki wzór własnymi słowami, na przykład wyjaśnić, co oznaczają litery we wzorze $P = a \cdot h$ i zastąpić ten wzór sformułowaniem typu: „pole równoległoboku to bok razy odpowiednia wysokość".

Nie oczekuje się od uczniów algebraicznego przekształcania wzorów. Mogą dodać $2x + 3x$ (przez analogie np. do 2 tys. + 3 tys.), ale nie należy wymagać dodawania $2 \cdot x + 3 \cdot x$, ani tym bardziej $2 \cdot x + x$. Zrozumienie tego ostatniego jest znacznie trudniejsze.

Uczeń ma też rozwiązywać równania pierwszego stopnia z niewiadomą występującą po jednej stronie równania, ale – uwaga: *poprzez zgadywanie, dopełnianie lub wykonanie działania odwrotnego.* Otóż sensowne odgadywanie i następnie sprawdzanie tego należy do normalnego repertuaru rozumowań matematyka i w pewnych przypadkach może okazać się skuteczniejsze niż stosowanie wyuczonego schematu. Zalecanym sposobem rozwiązywania równań jest zgadywanie, w nieco trudniejszych przykładach połączone z działaniem odwrotnym i dopełnianiem. Rozwiązywanie równań jest w szkole podstawowej ściśle związane z rozumieniem działań i zapisu – na tym etapie nie stosujemy metody równań równoważnych. Uczeń powinien umieć rozwiązać zarówno równanie $5x = 10$ (np. przez odgadnięcie), jak i równanie $5 \cdot x = 10$ (np. przez dzielenie).

Skąd się wzięło ograniczenie, że niewiadoma ma występować tylko po jednej stronie równania? Otóż badania naukowe dydaktyków prowadzone w wielu krajach pokazały, że istnieje ogromna różnica trudności między równaniami np.

$$5x - 28 = 32 \quad \text{i} \quad 7x - 28 = 32 + 2x.$$

Dla dobrego licealisty są to równania o niemal identycznym stopniu trudności. Jednak okazuje się, że wielu młodszych uczniów potrafi rozwiązać lewe równanie, a prawe pozostaje poza zasięgiem ich możliwości. Ujmując to w wielkim skrócie, można rzec, że to lewe równanie da się rozwiązać na poziomie myślenia arytmetycznego poprzez odwracanie działań, prawe natomiast wymaga już myślenia algebraicznego.

W dawniejszych programach nauczania pojawiało się budzące wątpliwości hasło: zapisywanie wyrażeń algebraicznych. Nie wiadomo było, czy chodzi o wyrażenia typu: Iloczyn liczb a i b zwiększony o 5, czy raczej: Ile nóg ma n koni? Z obecnego zapisu wyraźnie widać, że oczekujemy od uczniów umiejętności drugiego typu.

Można od ucznia oczekiwać umiejętności zapisywania w postaci wyrażenia algebraicznego informacji osadzonych w kontekście praktycznym z zadaną niewiadomą, np. zapisanie ile kosztuje 5 kg jabłek w cenie po x złotych za kilogram lub ile lat ma Kasia, przy podanej informacji, że jest o 5 lat starsza od Basi, która ma b lat. Zdolniejsi uczniowie mogą sobie także poradzić z zapisywaniem informacji, w których niewiadoma nie jest określona z góry (mogą sami to ustalić), ale na tego typu przykłady przyjdzie czas w gimnazjum.

Zadania tekstowe

Ważna jest swoboda ucznia w doborze metod rozwiązywania zadań tekstowych. Szczególnie wyraźnie wtedy widać, jak uczeń rozumuje, jak rozumie tekst zawierający informacje liczbowe, jaką tworzy strategię rozwiązania. Należy akceptować wszelkie poprawne strategie i dopuszczać stosowanie przez ucznia jego własnych, w miarę czytelnych zapisów rozwiązania.

W podstawie wyraźnie określono, czego oczekuje się od ucznia. Nie wymaga się stosowania równań do rozwiązywania trudnych zadań tekstowych, takich, których uczeń nie potrafi rozwiązać za pomocą rozumowania arytmetycznego. Ważne jest, by uczeń nie tylko rozwiązywał zadania tekstowe, ale też, by sprawdzał otrzymane wyniki, oceniając ich życiową sensowność.

Elementy geometrii płaszczyzny

Uczeń ma zarówno rozpoznawać i nazywać figury: punkt, prosta, półprosta, odcinek oraz odcinki i proste prostopadłe i równoległe, ale również rysować je: z pomocą linijki i ekierki, oraz szkicowo odręcznie.

Nie należy oczekiwać od ucznia znajomości definicji kąta – jest zbyt trudna i niejednoznaczna, szczególnie w zestawieniu z kątami w wielokącie. Wystarczy, że umie z sensem wykonać czynności wymienione w podstawie programowej. Można używać nazwy „kąt pełny" dla kąta o mierze 360 stopni oraz „kąt półpełny" dla kąta o mierze 180 stopni, ale nazwy te mogą mieć dla ucznia sens jedynie w specjalnym kontekście, np. sumy kątów w trójkącie, a nie jako nazwy samodzielnych obiektów. Można używać także pojęcia „kąt wklęsły", szczególnie w wielokątach. W praktyce kąt jest najczęściej utożsamiany z jego miarą i dopuszczalne jest takie traktowanie go przez ucznia.

Uczeń powinien posługiwać się pojęciem wielokąta (trójkąta, czworokąta) intuicyjnie, bez żadnej definicji (definicja, korzystająca z pojęcia łamanej zamkniętej – to najwcześniej poziom liceum).

Trapez definiujemy jako czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych. Uczeń powinien wiedzieć, że każdy równoległobok jest trapezem, powinien też umieć podać co najmniej jedną cechę wyodrębniającą, na przykład kwadraty spośród rombów lub równoległoboki spośród trapezów.

Nie oczekujemy od ucznia definicji koła i okręgu, powinien jednak znać różnicę między tymi pojęciami oraz wiedzieć, że średnica koła (okręgu) jest jedną z cięciw tego koła (okręgu), a promień koła (okręgu) jest dwa razy krótszy od średnicy tego koła (okręgu).

Bryły

Uczeń ma rozpoznawać i nazywać graniastosłupy proste, ostrosłupy, walce, stożki i kule w sytuacjach praktycznych i wskazywać te bryły wśród innych modeli brył. Większej wiedzy oczekujemy w przypadku prostopadłościanów i sześcianów, w szczególności objaśniania, dlaczego dany graniastosłup jest (lub nie jest) prostopadłościanem. Wymaga się rozpoznawania siatek graniastosłupów prostych i ostrosłupów oraz rysowania siatek prostopadłościanów, ale dla lepszego poznania tych brył uczeń powinien skleić kilka z nich z własnoręcznie sporządzonych siatek. Dla ucznia jest to rozrywka i szansa na pokazanie swoich zdolności manualnych, a jednocześnie przygotowuje go do późniejszych obliczeń i rozwija wyobraźnię przestrzenną. Warto też, by skleił powierzchnię boczną stożka („czapeczkę") z wycinka kołowego.

Obliczenia w geometrii

Kształtowanie pojęcia pola prostokąta należy rozpocząć od sytuacji, w których oba boki wyrażają się liczbami naturalnymi i uczeń ma obliczyć, z ilu kwadracików składa się prostokąt. W naturalny sposób pojawia się mnożenie. W przypadku długości ułamkowych wystarczy, że uczeń wie, że nadal stosuje się tę samą procedurę: aby obliczyć pole prostokąta, mnożę długości boków (wyrażone w tych samych jednostkach).

Wymóg stosowania przez ucznia różnych jednostek pola (bądź objętości) nie jest równoznaczny z umiejętnością zamiany jednej jednostki na drugą. Uczeń powinien stosować różne jednostki w zależności od kontekstu zadania. Jeżeli zaleceniem jest podanie wyniku np. w litrach, a dane są w centymetrach, należy zamieniać jednostki na poziomie liniowym, czyli najpierw centymetry na decymetry, a potem dopiero obliczać objętość czy pojemność.

Droga, prędkość, czas

Przy wykonywaniu związanych z tym obliczeń uczeń nie musi umieć posługiwać się wzorami fizycznymi (typu $v = s/t$). Wystarczy, jeśli uczeń wie, że prędkość to jest droga podzielona przez czas i umie to stosować. Uczeń może wyrażać prędkość w wygodnych w danej sytuacji jednostkach (np. w km/h lub m/min), nie należy jednak od niego oczekiwać umiejętności zamiany jednych jednostek prędkości na inne; to pojawi się dopiero w gimnazjum.

Elementy statystyki opisowej

Uczeń ma gromadzić i porządkować dane, posługując się m.in. tabelami. Ma też odczytywać i interpretować dane przedstawione w tekstach, tabelach, diagramach i na wykresach, przy czym nie chodzi tu o wykresy funkcji w układzie współrzędnych, lecz o takie wykresy, jakie mogą się pojawić w gazecie (na przykład notowania walut lub zmiany temperatury w prognozie pogody).

Wymagania ogólne dla gimnazjum opisują obszary aktywności ucznia podczas uczenia się matematyki. Warto zwrócić uwagę na fakt, że analogiczne wymagania ogólne sformułowano dla IV etapu edukacji. Nieco inne wymagania dla II etapu edukacji wynikają z faktu, iż stawiane są młodszemu uczniowi. Dzięki spójności wymagań ogólnych można będzie na kolejnym etapie edukacji rozwijać kształtowane wcześniej umiejętności i monitorować ich rozwój.

Aby określić umiejętności ucznia na zakończenie gimnazjum, należy do wymagań szczegółowych z III etapu edukacji dołożyć wszystkie wymagania szczegółowe z I i II etapu edukacji.

Jakie główne zmiany wprowadzono w gimnazjum?

Jeśli za punkt odniesienia wziąć podstawę z 2007 roku, to kilka tematów przeniesiono ze szkoły podstawowej do gimnazjum i kilka z gimnazjum do IV etapu nauczania.

Ze szkoły podstawowej przeniesiono:
- posługiwanie się liczbami rzymskimi większymi od 30,
- równania z jedną niewiadomą, w których niewiadoma występuje po obu stronach równania.

Do IV etapu nauczania przesunięto:
- nierówności pierwszego stopnia,
- twierdzenie Talesa,
- cechy podobieństwa trójkątów (ale zostawiono własności trójkątów prostokątnych podobnych),
- graniastosłupy pochyłe.

Te zestawienia nie oddają oczywiście istoty wszystkich zmian, bo oprócz przesunięć między etapami nauczania, zmieniono zakres niektórych haseł lub dodano nowe, niewystępujące w podstawie z 2007 roku (np. kąty środkowe).

Liczby wymierne

Wyodrębnienie dwóch osobnych działów „liczby wymierne dodatnie" i „liczby wymierne (dodatnie i niedodatnie)" ma na celu uniknięcie kumulacji trudności, jakie pojawiłyby się, gdyby umiejętności z pierwszego z tych działów łączyć z liczbami ujemnymi.

W szkole podstawowej uczeń nauczył się wykonywać działania na liczbach naturalnych oraz na ułamkach zwykłych i dziesiętnych oraz wykonywał proste rachunki (głównie pamięciowe) na liczbach całkowitych. Teraz to jest rozwijane i systematyzowane.

Uczeń powinien umieć zaznaczyć na osi liczbowej zbiór liczb spełniających nierówność typu $x \geq 3$, $x < 5$ itp. Warto zwrócić uwagę, że w szkole podstawowej nie było okazji, by uczeń posługiwał się znakami nierówności nieostrych. Tam znak nierówności pojawiał się przy porównywaniu dwóch liczb, a wtedy nie ma potrzeby korzystania z nierówności nieostrych.

Uczeń powinien znać i umieć stosować regułę zaokrągleń zarówno do ułamków dziesiętnych skończonych, jak i do rozwinięć dziesiętnych okresowych.

Ważne jest w gimnazjum dalsze rozwijanie umiejętności szacowania wyniku. Uczeń powinien umieć stwierdzić, od jakiej liczby jest na pewno większa, a od jakiej na pewno mniejsza wartość danego nieskomplikowanego wyrażenia arytmetycznego.

Uczeń powinien wiedzieć, że nie wszystkie liczby, którymi będzie się posługiwał, są wymierne, powinien poznać przykłady liczb niewymiernych. Nie wymaga się jednak, by pamiętał, które liczby są niewymierne i potrafił je rozpoznawać.

Uczeń ma umieć zamieniać jednostki:

– masy: gram, dekagram, kilogram, kwintal, tona,

– długości: milimetr, centymetr, decymetr, metr, kilometr.

– pola: m^2 na cm^2 i dm^2 (i odwrotnie) oraz km^2 na m^2, ary i hektary (i odwrotnie),

– objętości: m^3 na cm^3 i dm^3 (i odwrotnie) oraz dm^3 lub litry na cm^3 lub mililitry (i odwrotnie),

– czasu,

– prędkości: km/h na m/s (i odwrotnie),

– gęstości: kg/m^3 na g/cm^3 (i odwrotnie).

Dlaczego w podstawie dla gimnazjum nie wspomniano o wartości bezwzględnej?

Pojęcie to figuruje wśród wymagań po klasie VI. Uczeń ma umieć obliczyć wartość bezwzględną dowolnej konkretnej liczby całkowitej.

W gimnazjum powinno się obliczać odległość dwóch punktów na osi liczbowej o współrzędnych całkowitych, np. punktów 7 i 12, a także punktów –7 i –12. Wtedy powinno się też zwrócić uwagę, że za każdym razem od liczby większej odejmuje się liczbę mniejszą, czyli od tej liczby, która na osi liczbowej znajduje się na prawo odejmuje się liczbę znajdującą się na lewo. Pouczające jest obliczenie odległości punktów znajdujących się po obu stronach osi, np. 7 i –12 wprost z rysunku i sprawdzenie, że to też jest różnica tych liczb. Nie jest do tego potrzebna wartość bezwzględna.

Uczeń nie musi w szczególności wiedzieć, że wszystkie przypadki obliczania odległości na osi dają się zapisać jednolicie za pomocą bezwzględnej wartości jako $|a-b|$. Poznaje takie własności w kontekście arytmetyki, nie algebry, a więc symbol wartości bezwzględnej nie jest potrzebny w powiązaniu z symbolami literowymi.

W wymaganiach po gimnazjum termin „wartość bezwzględna” w ogóle się nie pojawia, mamy go dopiero znów na poziomie liceum. Jednakże na mocy powyżej sformułowanej zasady (I) uczeń po gimnazjum ma umieć to, co było wymagane szkole podstawowej, a więc w szczególności ma wiedzieć, jak oblicza się wartość bezwzględną. Ale w gimnazjum nie ma potrzeby dalszego teoretycznego poszerzania tej wiedzy i podnoszenia poziomu abstrakcji. Po pierwsze, nie jest to do niczego potrzebne. Po drugie, chodzi o to, aby w gimnazjum nie wprowadzano określenia wartości bezwzględnej w standardowy sposób:

(1)

$$|a| = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

Takie definiowanie wartości bezwzględnej jest niezrozumiałe dla znaczącej części uczniów. Już zapis klamrowy sam w sobie jest trudny. Klamry normalnie używane w gimnazjum mają zupełnie inny sens, służą do zapisu układu równań. Na to nakładają się znane nieporozumienia związane z często spotykanym nastawieniem ucznia, że liczba $-a$ jest ujemna.

Wprowadzanie w szkole pojęcia wartości bezwzględnej wzorem (1) jest merytorycznie poprawne. Jednak przedwczesne użycie tego wzoru jako określenia wartości bezwzględnej można uznać za błąd dydaktyczny, niestety bardzo rozpowszechniony. Przy tym bowiem podejściu wartość bezwzględna, będąca pojęciem arytmetycznym, jest definiowana jako funkcja i to funkcja określona różnymi wzorami na różnych przedziałach. Choć od lat wiadomo, że uczniowie nie rozumieją tego wzoru, autorzy podręczników z uporem go podają. Wzór (1) pojawił się w szkole w okresie tendencji do przedwczesnego dążenia do pełnej ogólności w nauczaniu szkolnym.

Określenie $|x|$ w postaci zapisu klamrowego typu (1) ma sens jedynie jako podsumowanie okresu kształtowania wartości bezwzględnej, gdy uczeń już wie, czym jest $|x|$ dla konkretnych liczb. Kolejność powinna być więc odwrotna: uczeń powinien stwierdzić, uogólniając poznane przykłady, że jeśli $x < 0$, to $-x > 0$, potem powinien stwierdzić, że $-x = |x|$ dla $x < 0$ i dopiero na koniec może pojawić się synteza tych stwierdzeń w postaci (1). Nie może natomiast wzór (1) być punktem wyjścia poznawania pojęcia wartości bezwzględnej.

Potęgi i pierwiastki

W szkole podstawowej uczeń nauczył się obliczać kwadraty i sześciany liczb naturalnych, ułamków zwykłych i dziesiętnych oraz liczb mieszanych. W gimnazjum ma obliczać potęgi liczb wymiernych o wykładnikach naturalnych oraz zamieniać potęgi o wykładnikach całkowitych ujemnych na odpowiednie potęgi o wykładnikach naturalnych.

Wyniki działań na pierwiastkach często są liczbami niewymiernymi, zapisanymi za pomocą symbolu pierwiastka. Nie jest celowe podkreślanie niewymierności tych liczb, ale uczeń powinien, zwłaszcza w zadaniach z kontekstem praktycznym, umieć podać ich wymierne przybliżenie.

W obliczeniach należy uwzględnić także pierwiastki trzeciego stopnia z liczb ujemnych.

Procenty

W szkole podstawowej uczeń wykonuje obliczenia uwzględniające rachunek procentowy w bardzo małym zakresie, interpretuje 100% pewnej wielkości jako całość, 50% – jako połowę, 25% – jako jedną czwartą, 10% – jako jedną dziesiątą, a 1% – jako setną część pewnej wielkości liczbowej oraz w przypadkach osadzonych w kontekście praktycznym oblicza procent danej wielkości, w stopniu trudności typu 50%, 10%, 20%. Ogólne zasady wykonywania obliczeń procentowych poznaje uczeń w gimnazjum.

Nie wymaga się od ucznia gimnazjum, by umiał wykonać obliczenia dotyczące kredytów oraz lokat złożonych na okres inny niż jeden rok.

Wyrażenia algebraiczne i równania

W szkole podstawowej uczeń nabywa umiejętność korzystania z nieskomplikowanych wzorów, w których występują oznaczenia literowe, zamienia wzór na formę słowną; stosuje oznaczenia literowe nieznanych wielkości liczbowych, zapisuje proste wyrażenie algebraiczne na podstawie informacji osadzonych w kontekście praktycznym.

W gimnazjum uczeń buduje wyrażenia algebraiczne, oblicza wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych, dodaje i odejmuje sumy algebraiczne, mnoży jednomiany, mnoży sumy algebraiczne przez jednomian oraz mnoży nieskomplikowane sumy algebraiczne, przekształca sumy algebraiczne oraz wzory.

Natomiast wzory skróconego mnożenia uczeń pozna dopiero na IV etapie edukacji.

Uczeń w szkole podstawowej nabywa umiejętność rozwiązywania równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą występującą po jednej stronie równania. W gimnazjum rozwiązuje dowolne równania stopnia pierwszego z jedną niewiadomą oraz układy równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi. Układy równań powinien umieć rozwiązać przynajmniej jedną metodą. Ważne jest, aby potrafił wykorzystywać równania i układy równań do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym.

Od ucznia wymaga się, by umiał wyznaczać wskazaną wielkość z podanych wzorów, ale nie powinny być to wzory zbyt skomplikowane. Chodzi raczej o podstawowe umiejętności potrzebne na lekcjach geometrii i fizyki, a nie wyłącznie o samoistne ćwiczenia algebraiczne.

Natomiast rozwiązywanie nierówności pojawi się na etapie ponadgimnazjalnym.

Wykresy funkcji

W szkole podstawowej nie wymaga się od ucznia zaznaczania w układzie współrzędnych na płaszczyźnie punktów o danych współrzędnych i odczytywania współrzędnych danych punktów. Te umiejętności kształtujemy w gimnazjum.

Analizując własności funkcji, uczeń posługuje się wykresem i z niego odczytuje wartość funkcji dla danego argumentu oraz argumenty dla danej wartości funkcji. Ustala też dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, dla jakich ujemne, a dla jakich zero oraz odczytuje i interpretuje informacje przedstawione za pomocą wykresów funkcji. Natomiast obliczanie wartości funkcji ograniczone jest do tych, które podane są nieskomplikowanymi wzorami. Uczeń powinien też umieć zaznaczać punkty należące do wykresu takiej funkcji.

Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa

Absolwent szkoły podstawowej gromadzi i porządkuje dane oraz odczytuje i interpretuje dane przedstawione w tekstach, tabelach, diagramach i na wykresach.

W gimnazjum nie tylko interpretuje dane przedstawione za pomocą tabel, diagramów słupkowych i kołowych, wykresów, ale także wyszukuje, selekcjonuje i porządkuje informacje z dostępnych źródeł oraz przedstawia dane w tabeli, za pomocą diagramu słupkowego lub kołowego. Wyznaczając liczby charakteryzujące zbiór wyników, wyznacza średnią arytmetyczną i medianę.

W gimnazjum uczeń nabywa pierwsze umiejętności związane z rachunkiem prawdopodobieństwa, a mianowicie analizuje proste doświadczenia losowe i określa prawdopodobieństwa najprostszych zdarzeń w tych doświadczeniach.

Figury płaskie

Wiele umiejętności z planimetrii uczeń nabywa w szkole podstawowej, w gimnazjum są one rozwijane, a także kształtowanych jest wiele nowych umiejętności.

Warto wyjaśnić ewentualne wątpliwości.

Uczeń nie musi znać nazw: „kąty odpowiadające”, „kąty naprzemianległe”, ale musi wiedzieć, które z nich są równe.

Uczeń korzysta z faktu, że styczna do okręgu jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności na przykład przy rysowaniu stycznej oraz przy konstrukcji okręgu wpisanego w trójkąt.

Uczeń ma rozpoznawać kąty środkowe, nie musi jednak rozpoznawać kątów wpisanych oraz nie musi znać twierdzenia o zależności miar kątów wpisanych i kąta środkowego opartych na tym samym łuku.

Uczeń ma stosować zarówno twierdzenie Pitagorasa, jak i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.

W podstawie programowej wymienione są konstrukcje, które uczeń powinien umieć wykonać. Od ucznia wymagamy jedynie, by umiał za pomocą cyrkla i linijki narysować wskazane figury i potrafił opowiedzieć, jak wykonał konstrukcję i dlaczego właśnie tak. Nie spodziewamy się, że po wykonaniu konstrukcji uczeń potrafi zapisać bardzo precyzyjnie wszystkie jej etapu ani że potrafi podać formalny dowód poprawności konstrukcji.

Uczeń konstruuje kąt o mierze 60°, wykorzystując trójkąt równoboczny, kąt o mierze 30° – prowadząc np. dwusieczną kąta 60° lub symetralną boku trójkąta równobocznego, kąt o mierze 45° – prowadząc np. dwusieczną kąta 90° lub symetralną przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego. Korzystając z własności odpowiednich wielokątów, uczeń powinien na przykład umieć skonstruować trójkąt równoboczny, kwadrat i sześciokąt foremny.

Czy w nowej podstawie jest liczba π ?

Wśród wymagań po gimnazjum czytamy: *Uczeń oblicza długość okręgu i łuku okręgu; oblicza pole koła, pierścienia kołowego, wycinka kołowego.* Jest oczywiste, że nie można obliczyć długości okręgu lub pola koła, nie używając liczby π. Tak więc znajomość tej liczby jest wymagana w podstawie. Wątpliwości może budzić to, czy nie powinno być osobnego hasła dotyczącego liczby π. Warto jednak spytać: do czego miałoby to być potrzebne? Co miałby wiedzieć uczeń o tej liczbie poza stosowaniem jej do obliczenia obwodów i pól?

Dlaczego w podstawie dla gimnazjum i liceum nie wspomniano o niewymierności liczby π i liczby $\sqrt{2}$?

Wielu matematyków jest przekonanych, że uczeń powinien wiedzieć, że π i $\sqrt{2}$ są liczbami niewymiernymi. Do czego jednak miałaby być potrzebna mu ta informacja?

Nasza szkoła przywiązuje ogromną wagę do niewymierności liczb π i $\sqrt{2}$. Fakt tych niewymierności jest ważny, owszem, ale z filozoficznego punktu widzenia. Było to ogromnie ważne dla starożytnych pitagorejczyków, bowiem obaliło ich silne przekonanie, że harmonia kosmosu wyraża się stosunkami liczb naturalnych. Ich wizja świata zawaliła się, gdy stwierdzili, że przekątna kwadratu wyłamuje się z tego obrazu świata. Jednak z punktu widzenia matematyki szkolnej (a także inżynierskiej i zastosowań do fizyki) z niewymierności π i $\sqrt{2}$ nic właściwie nie wynika. Przecież wszystkie wielkości fizyczne są znane tylko w przybliżeniu, bo są efektem jakichś pomiarów. Komputery też posługują się wyłącznie liczbami wymiernymi.

By uzmysłowić sobie, że niewymierność tych liczb nie ma żadnego wpływu na szkolny zakres wiedzy, pomyślmy, co by było, gdyby P2 był jednak liczbą wymierną, ale zapisywałby się za pomocą ułamka, którego licznik i mianownik miałyby jakąś ogromną liczbę cyfr, np. milion cyfr, może nawet więcej cyfr niż jest atomów we wszechświecie. Co wynikałoby z tej wymierności? Nic. Czemu zatem miałoby służyć wymaganie tej niewymierności w podstawie programowej? Ważniejsze zresztą od niemożności przedstawienia liczb π i $\sqrt{2}$

w postaci ułamków jest nieokresowość ich rozwinięć dziesiętnych. Ale okresowość ma znaczenie w szkole jedynie w przypadku, gdy okres jest niezbyt długi i da się wypisać.

Zapewne w podręcznikach znajdzie się informacja o istnieniu liczb niewymiernych, a także informacja o niewymierności liczb π i $\sqrt{2}$. Nie wymaga się jednak, by uczeń umiał wśród kilku podanych liczb wskazać liczby niewymierne.

Bryły

W szkole podstawowej uczeń uczy się rozpoznawania graniastosłupów prostych, ostrosłupów, walców, stożków i kul oraz rozpoznawania siatek graniastosłupów prostych i ostrosłupów i rysowania siatek prostopadłościanów. Oblicza objętości prostopadłościanów.

Umiejętności związane z obliczaniem pól powierzchni i objętości innych brył uczeń nabywa w gimnazjum: pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli. W gimnazjum uczeń powinien potrafić uzasadnić, dlaczego dany graniastosłup i ostrosłup są prawidłowe oraz wyróżnić graniastosłupy i ostrosłupy prawidłowe wśród innych brył.

Dlaczego mamy obowiązkową maturę z matematyki? Czy jest to konieczne?

Czy polski system edukacyjny może funkcjonować bez obowiązkowej matury z matematyki? Oczywiście może – taka właśnie sytuacja miała miejsce przez ostatnie lata – ale funkcjonuje wadliwie, co jest szczególnie widoczne z perspektywy kilkunastu lat. Doprowadziło to do niekorzystnych zjawisk, za które w końcu płaci całe społeczeństwo.

Matematyka jest niezbędnym narzędziem i językiem potrzebnym do korzystania z ogromnej części dorobku cywilizacyjnego. Język ten jest trudny, wymaga wieloletniej, systematycznej nauki i co bardzo ważne – uczyć się go trzeba w odpowiednim wieku. Jeżeli człowiek nie opanuje pewnych umiejętności matematycznych w wieku szkolnym, to ma niewielkie szanse na nadrobienie zaległości w wieku dojrzałym. Obecnie wprawdzie uczeń ma możliwość przyswojenia sobie znaczącej porcji umiejętności matematycznych, ale nie musi. A ponieważ matematyka jest trudna, więc młodzi ludzie w większości postępują racjonalnie, zmierzając do egzaminu dojrzałości po najkorzystniejszej z ich punktu widzenia drodze. Jednak to, co może być korzystne z punktu widzenia pojedynczej osoby, może zarazem stwarzać poważne problemy w skali społecznej.

Chociaż obowiązkowa matura z matematyki została zniesiona wiele już lat temu, skutki tego szczególnie ostro objawiają się w ostatnich latach. Dawniej liczba miejsc na studia była mniejsza od liczby kandydatów. By otrzymać indeks, trzeba było zdać egzamin wstępny. Poziom wymagań na egzaminie wstępnym na uczelnie techniczne, ekonomiczne i kierunki przyrodnicze uniwersytetów skutecznie regulował poziom nauczania matematyki w szkołach ponadgimnazjalnych. W ostatnich jednak latach ten mechanizm przestał działać. Zniesiono egzaminy wstępne, postanawiając, że jedynym kryterium przyjęcia na studia jest wynik egzaminu maturalnego. Ustawodawca zakładał, że w zasadzie nic się nie zmieni, bo uczelnie techniczne i podobne będą rekrutować w oparciu o wynik egzaminu maturalnego z matematyki. Niestety doszło do zderzenia dwu tendencji: niżu demograficznego (pogłębionego emigracją zarobkową) i zwiększenia liczby miejsc na studiach związanego ze zmianami zasad finansowania szkolnictwa wyższego i rozwojem szkolnictwa prywatnego. Aktualnie więc sytuacja wygląda tak, że na wiele kierunków technicznych i matematyczno-przyrodniczych może się dostać każdy, kto chce, a i tak pozostaje wiele wolnych miejsc. Nie ma chętnych na te studia, bo kandydaci wiedzą, że w ich programie jest matematyka i jej zaliczenie stanowi duży problem. Oblegane są natomiast kierunki niewymagające matematyki, np. pedagogika czy zarządzanie. Rektorzy wyższych uczelni alarmują, że taki stan grozi poważnymi komplikacjami na rynku pracy i tym, że Polska będzie przegrywać międzynarodową rywalizację. Już dziś brakuje inżynierów niektórych specjalności, a wobec otwarcia rynku pracy na Zachodzie sytuacja się nie poprawi. Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego uruchomiło w tym roku (2009) specjalny program stypendialny, ale jest to rozwiązanie doraźne.

Co gorsza, wielu uczniów już po szkole podstawowej nastawiała się, że nie będzie zdawać matury z matematyki i wobec tego nie miała motywacji do uczenia się tego przedmiotu w gimnazjum.

W tej sytuacji najlepszym rozwiązaniem jest powrót do obowiązkowej matury z matematyki. Opory, jakie u wielu młodych ludzi budzi matematyka, wynikają często z braku zainteresowania, bliższego kontaktu, niepodejmowania próby przezwyciężenia choćby niewielkich trudności matematycznych. Obowiązkowa matura wymusi opanowanie podstawowych umiejętności (działania na ułamkach, najprostsze przekształcenia algebraiczne), na których brak powszechnie narzekają wykładowcy wyższych uczelni. Organizuje się tzw. zajęcia wyrównawcze z matematyki na pierwszym roku studiów, ale to jedynie nieco łagodzi problem.

Wiadomo też, że „myślenie matematyczne" jest cenione przez wykładowców innych kierunków (np. prawników, filozofów). Rozwijanie tego typu myślenia jest bardzo ważne dla ogólnego rozwoju ucznia.

Jaką rolę ma pełnić zakres podstawowy, a jaką zakres rozszerzony?

W każdym roczniku jest wielu uczniów utalentowanych matematycznie i takich, których aspiracje sięgają wyżej niż skromny zakres dla wszystkich. To przyszli kandydaci na matematykę, informatykę, fizykę i bardziej wymagające kierunki techniczne. Trzeba im umożliwić zdobywanie wiedzy i rozwijanie zainteresowań na poziomie zdecydowanie wyższym, niż to zakłada podstawa dla wszystkich.

W szkole podstawowej, w gimnazjum i w I klasie liceum, tj. przez 10 lat, podstawa programowa jest jednolita dla wszystkich uczniów. Natomiast przez pozostałe dwa lata mamy wyraźne różnicowanie zakresu nauki. Uczniowie mają opanować w szerszym zakresie te przedmioty, z którymi wiążą swoją przyszłość zawodową.

Zakłada się więc, że uczeń zamierzający studiować np. matematykę czy fizykę wybierze rozszerzony zakres z matematyki. I to nie dlatego, że matura na poziomie podstawowym miałaby wykluczyć staranie się o przyjęcie na te kierunki (bo nie wykluczy), ale dlatego że mając opanowany tylko podstawowy zakres umiejętności, trudno będzie zaliczyć pierwszy semestr na takich kierunkach studiów. Podstawa dla zakresu rozszerzonego jest daleko bogatsza w treści niż dla zakresu podstawowego, chociaż jest istotnie uboższa niż program dawnych klas matematyczno-fizycznych.

Dlaczego z podstawy dla liceum usunięto elementy logiki matematycznej?

Maturzysta nie będzie miał obowiązku znajomości symboli logiki formalnej. W dyskusjach wysunięto zarzut, że na skutek tego nie będzie się rozwijać logicznego myślenia. Nie jest to zarzut słuszny. W podstawie dla liceum wśród wymagań ogólnych mamy część zatytułowaną: „rozumowanie i argumentacja" – wymaganie to sformułowane jest osobno dla zakresu podstawowego i dla rozszerzonego. Szkoła ma nadal uczyć rozumowania matematycznego i na maturze będą zadania, które to sprawdzają. Rozumowań należy uczyć w trakcie wszelkich wywodów matematycznych, przez cały okres nauki szkolnej, dostosowując je do aktualnych możliwości uczniów.

Znajomość ogólnych pojęć i symboli rachunku zdań i kwantyfikatorów nie jest ani warunkiem koniecznym, ani dostatecznym dla logicznego rozumowania w matematyce. Przekonali się o tym wielokrotnie wykładowcy wyższych uczelni: student może znać te symbole, ale nieraz nie ułatwia mu to prowadzenia poprawnego rozumowania.

Nadmiar symboli raczej utrudnia niż ułatwia czytanie tekstów matematycznych. Łatwiej np. czyta się wzór, w którym jest słowo „lub" niż znak alternatywy, np. porównując dwa sposoby zapisu:

$$x < -3 \quad \vee \quad x > 7, \qquad\qquad x < -3 \quad \text{lub} \quad x > 7,$$

widać, że prawy zapis wymaga mniejszego wysiłku, zarówno na poziomie szkolnym, jak i zaawansowanym uniwersyteckim. Ponadto symbol alternatywy, zwłaszcza w przypadku pisma ręcznego, łatwo można pomylić z literami V i v (oznaczającymi m.in. objętość, prędkość itp.).

Przeplatany język symboli ze słowami języka polskiego najłatwiej się czyta i rozumie. Nadmiar symboli czyni tekst trudniejszym nawet dla osoby z tym obytej.

Jedyne symbole, które są naprawdę poręczne, to strzałka implikacji $=>$ i dwustronna strzałka równoważności $<=>$. Ale aby używać takich strzałek, wcale niepotrzebna jest cała teoretyczna wiedza z rachunku zdań. Wystarczy używać ich w konkretnych sytuacjach jako uzupełnienie słów „jeżeli" i „to". Ich sens wyłania się stopniowo uczniowi przy rozpatrywaniu odpowiednich zagadnień matematycznych (np. w klasach IV–VI „jeżeli liczba jest podzielna przez 6, to ...").

Wszystkie elementy logiki, jakie mogą i powinny pojawić się w nauczaniu licealnym, dadzą się w pełni realizować z wykorzystaniem naturalnego języka polskiego, na bieżącym materiale matematycznym, a nie jako osobny dział i cel sam w sobie.

Podsumowując, uczeń ma przeprowadzać rozumowania matematyczne związane z materiałem opisanym w podstawie programowej, nie ma jednak obowiązku znać specjalnych terminów logicznych ani symboli.

Dlaczego w liceum nie ma elementów teorii mnogości?

Samo pojęcie zbioru, intuicyjnie rozumiane, pojawia się w podstawie wielokrotnie (również w zakresie podstawowym). Nie ma natomiast symboli działań na zbiorach. Nie wymaga się od maturzysty systematycznego stosowania języka zbiorów ani znajomości specjalnych symboli, tak jak np. $x \in A$ czy $A \cap B$. Pojęcie zbioru może i powinno być używane tam, gdzie to jest naturalne i wygodne, np. że okrąg jest zbiorem punktów jednakowo oddalonych od środka lub określanie dziedziny funkcji. Pojęcie zbioru niezbędne jest też m.in. przy geometrii płaszczyzny kartezjańskiej.

Natomiast dla rachunku prawdopodobieństwa, w takim zakresie, jaki będzie wymagany od przyszłych maturzystów, znajomość działań na zbiorach nie jest konieczna. Pojęcie przestrzeni probabilistycznej i prawdopodobieństwo warunkowe wyrażone w języku zbiorów są dla przeciętnego ucznia trudne i nie są konieczne do wyrobienia intuicji prawdopodobieństwa. Oczywiście podstawa określa, co uczeń ma umieć, natomiast nauczyciel może uczyć więcej i szerzej.

Pamiętać należy, że nie jest celowe budowanie aparatu pojęciowego do podania np. abstrakcyjnej definicji funkcji, bowiem dla ucznia i tak funkcja będzie jedną z tych niewielu, z którymi się zapoznał (liniowe, kwadratowe, trygonometryczne). Sensowne jest natomiast nauczanie wzbogacające o nowe, konkretne fakty, dla których usystematyzowania w przyszłości uczeń zaakceptuje pojęcia mnogościowe.

Co maturzysta ma wiedzieć o funkcjach potęgowych, wykładniczych i logarytmicznych?

Pełny, dawniejszy zakres funkcji elementarnych dla wszystkich uczniów nie da się zrealizować.

Poważne trudności pojawiają się już na poziomie definicji, a czasu na nauczanie jest mało. W zakresie podstawowym uczeń oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na takich potęgach. Ponadto wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, ilorazu i potęgi o wykładniku naturalnym. W zakresie podstawowym nie wymaga się funkcji potęgowych i logarytmicznych, natomiast trzeba mieć pewną wiedzę o funkcjach wykładniczych ze względu na ich fundamentalne znaczenie nie tylko naukach przyrodniczo-technicznych, lecz też w naukach społecznych, w ekonomii, w lingwistyce.

W zakresie rozszerzonym wymaga się m.in. logarytmu potęgi o dowolnym wykładniku, wzoru na zamianę podstawy logarytmu oraz funkcji logarytmicznych, ale nie tyle, co ongiś w klasach matematyczno-fizycznych.

Co maturzysta ma umieć z trygonometrii?

W zakresie podstawowym ważne jest wymaganie: *uczeń wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od* 0° *do* 180°. Wychodzi się więc poza kąty ostre, ale nie rozważa się dowolnych kątów. Głównym argumentem było to, że taki zakres kątów jest niezbędny dla interpretacji współczynnika w równaniu kierunkowym prostej $y = ax + b$ jako tangensa kąta nachylenia prostej. Tyle też potrzeba do obliczeń związanych z trójkątami rozwartokątnymi. W zakresie podstawowym nie ma jednak ani miary łukowej kąta, ani funkcji trygonometrycznych kątów skierowanych. Więcej wymaga się w zakresie rozszerzonym, w tym znajomość podstawowych wzorów.

Dlaczego w nowej podstawie nie ma funkcji cotangens?

Złożyło się na to wiele przyczyn. Najważniejsze to, że funkcja ta nie jest niezbędna, bowiem ctgα jest tym samym co 1/tgα, a także tg (90° – α) i cała trygonometria bez trudu da się wyrazić za pomocą tych trzech funkcji: sinus, cosinus, tangens. Te jedynie funkcje znajdują się na kalkulatorze. W sumie cotangens nie jest niezbędny.

Kiedyś w szkole uczono sześciu funkcji trygonometrycznych. Później usunięto z programu dwie z nich, mianowicie funkcje secans i cosecans. Mało kto dziś o nich wie, bo to była po prostu odwrotność cosinusa i odwrotność sinusa.

Mniej funkcji – to mniej nazw, mniej definicji, mniej wzorów do pamiętania.

Dlaczego w podstawie nie ma pojęcia granicy funkcji, ani rachunku różniczkowego?

Nie ma tego w zakresie podstawowym z oczywistego powodu. Skoro matura ma być obowiązkowa dla wszystkich, nie można wymagać materiału, który – ze swej istoty – dla całej populacji młodzieży byłby zbyt trudny. Rachunek różniczkowy jest bardzo czasochłonny. Pośpieszne jego przerabianie mijałoby się z celem. Nauczyciele akademiccy niemal jednogłośnie twierdzą: „Z granicami sobie poradzimy; domagamy się, by maturzyści mieli opanowane ułamki". Zamiast zmagać się z trudnym pojęciem granicy, lepiej zaoszczędzony czas wykorzystać na lepsze opanowanie tego, co obowiązkowe. Badanie nieskomplikowanych funkcji wymiernych można przeprowadzić bezpośrednio, bez obliczania pochodnych, wykonując odpowiednie przekształcenia algebraiczne.

Granice funkcji i rachunek pochodnych znajdują się w zakresie rozszerzonym wraz z najważniejszymi zastosowaniami.

W znikomym zakresie pojawia się bezwzględna wartość wyrażeń algebraicznych. Bezwzględna wartość do niedawna była uważana za ważny temat. Jednakże wykorzystywana była niemal wyłącznie w ogólnej definicji granicy, w której pojawia się nierówność:

$$|a_n - g| < \varepsilon.$$

Bezwzględnej wartości i nierównościom z nią związanym poświęcano wiele czasu. Uważano, że ważne jest to, by uczniowie umieli wykazać zbieżność pewnych ciągów wprost na podstawie definicji granicy i z tego powodu spędzano w szkole wiele czasu na przekształcaniu nierówności typu $|x - a| < b$. Ale tej definicji granicy nie ma już w szkole średniej! Z uwagi jednak na to, że takich umiejętności oczekuje część uczelni wyższych, wymagania dotyczące bezwzględnej wartości pojawiają się w liceum, ale jedynie w zakresie rozszerzonym.

Co z zasadą indukcji?

Zasada indukcji matematycznej została usunięta całkowicie, również z zakresu rozszerzonego. Jest specyficznie trudna. Stosowanie jej stało się pewnym rytuałem, którego sens pojmowali nieliczni uczniowie.

Podsumowanie

Pomimo pewnej liczby redukcji obowiązkowego materiału na każdym etapie jest bardzo dużo. Zwłaszcza dużo jest w klasach IV–VI, bowiem przeniesione zostały pewne czasochłonne tematy z klasy III do IV, wymagające więcej lekcji, niż się zwolni po przeniesieniu pewnych tematów z klasy VI do gimnazjum.

W liceum oczywiście kluczowym problemem będzie obowiązkowa matura z matematyki. We wszelkich dyskusjach o tym, co powinno się znaleźć w zakresie rozszerzonym, należy pamiętać, że nie da się tam – w skali masowej – utrzymać poziomu dawnych liceów matematyczno-fizycznych.

Podstawa programowa jest zbiorem haseł, które zostaną uszczegółowione przez autorów programów nauczania, autorów podręczników i przede wszystkim przez nauczycieli. Każde, nawet pozornie najprostsze wymaganie może być analizowane na różnych poziomach trudności. Opierając się na tej samej podstawie można opracowywać mniej lub bardziej ambitne programy. O tym, jaka będzie wykładnia podstawy programowej, zadecyduje praktyka nauczania i praktyka egzaminów maturalnych.

Po kilku latach funkcjonowania nowej podstawy programowej w wyniku współdziałania szkoły, komisji egzaminacyjnych i uczelni wyższych, ustali się pewien poziom interpretowania i realizowania obowiązujących wymagań. W szczególności wymagania stawiane na wybranych kierunkach studiów będą stymulowały uczniów do nauki.