

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych  
oraz  
Schemat oceniania

Poziom Podstawowy

### Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Odpowiedź	A	C	A	A	D	B	A	A	C	A	B	D	D	C	D	C	C	C	C	B	C	A	C

### Schemat oceniania zadań otwartych

#### Zadanie 24. (2 punkty)

Rozwiąż nierówność  $x^2 - 3x + 2 < 0$ .

#### I sposób rozwiązania

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego

- obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego:

$$\Delta = 1 \quad x_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \quad x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

albo

- stosujemy wzory Viète'a:

$$x_1 + x_2 = 3 \quad \text{oraz} \quad x_1 \cdot x_2 = 2 \quad \text{i stąd} \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2$$

albo

- zapisujemy nierówność w postaci  $(x-1)(x-2) < 0$ . Lewą stronę nierówności możemy uzyskać np.:

- grupując wyrazy i wyłączając wspólny czynnik,

- korzystając z postaci kanonicznej  $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)$

- podając postać iloczynową

albo

- rysujemy fragment wykresu funkcji kwadratowej z zaznaczonymi miejscami zerowymi

albo

- wskazujemy pierwiastki trójmianu  $x_1 = 1, x_2 = 2$

Podajemy rozwiązanie nierówności:  $1 < x < 2$ .

#### Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy wyznaczy pierwiastki trójmianu kwadratowego lub zapisze trójmian w postaci iloczynowej i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy:

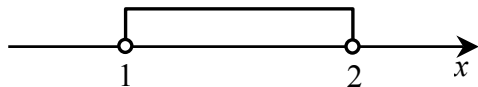
- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci:  $(1, 2)$  lub  $x \in (1, 2)$  lub  $1 < x < 2$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci:  $x > 1, x < 2$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów:



## II sposób rozwiązania

Zapisujemy nierówność w postaci

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} < 0, \text{ a następnie } \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 < \frac{1}{4}, \text{ a stąd } \left|x - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{2}, \text{ więc } 1 < x < 2.$$

## Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ..... 1 pkt

gdy doprowadzi nierówność do postaci  $\left|x - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{2}$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ..... 2 pkt

gdy:

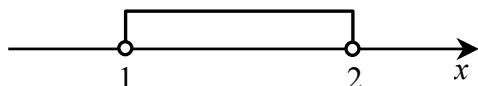
- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci:  $(1, 2)$  lub  $x \in (1, 2)$  lub  $1 < x < 2$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci:  $x > 1$ ,  $x < 2$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów:



## Uwagi

- Przyznajemy **2 punkty** za rozwiązanie, w którym zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu  $x = 1$ ,  $x = 2$  i zapisze np.:  $x \in (-1, 2)$ , popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków.

- Przyznajemy **1 punkt** zdającemu, który popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego

błędu rozwiąże nierówność, np. zapisze  $x_1 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{-2}$ ,  $x_2 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{-2}$ ,

$$x \in \left( \frac{-3 + \sqrt{17}}{-2}, \frac{-3 - \sqrt{17}}{-2} \right).$$

- Przyznajemy **1 punkt** zdającemu, który popełnił jeden błąd przy przepisywaniu nierówności (pisząc np.  $x^2 + 3x + 2 < 0$ ,  $x^2 - 3x + 2 > 0$ ), o ile trójmian z lewej strony nierówności ma dwa różne pierwiastki i zdający rozwiąże konsekwentnie nierówność do końca.

**Zadanie 25. (2 punkty)**

Udowodnij, że iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do 16, czyli  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 16$ , jest podzielny przez  $2^{15}$ .

**I sposób rozwiązania**

Wystarczy obliczyć liczbę dwójek w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby  $16!$ .

Co druga liczba całkowita jest podzielna przez 2, więc mamy 8 dwójek.

Co czwarta liczba całkowita jest podzielna przez 4, więc mamy następne 4 dwójki.

Co ósma liczba całkowita jest podzielna przez 8, więc mamy następne 2 dwójki.

W rozkładzie na czynniki pierwsze liczby  $16!$  jest jeszcze 1 dwójka.

Łącznie w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby  $16!$  mamy  $8 + 4 + 2 + 1 = 15$  dwójek, czyli liczba ta jest podzielna przez  $2^{15}$ .

**II sposób rozwiązania**

Liczbę  $16!$  możemy zapisać w postaci:

$$2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot (2 \cdot 5) \cdot 11 \cdot (3 \cdot 2^2) \cdot 13 \cdot (2 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 5) \cdot 2^4 = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$$

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy zapisze  $16!$  w postaci  $2 \cdot 3 \cdot (2^2) \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 9 \cdot (2 \cdot 5) \cdot 11 \cdot (2^2 \cdot 3) \cdot 13 \cdot (2 \cdot 7) \cdot 15 \cdot (2^4)$  i na tym zakończy lub dalej popelni błędy (np. źle zliczy liczbę czynników 2).

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy przeprowadzi pełny dowód.

**Zadanie 26. (2 punkty)**

Kąt  $\alpha$  jest ostry i  $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ . Oblicz  $3 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha$ .

**I sposób rozwiązania**

Najpierw obliczamy  $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$ .

Stąd  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ , bo  $\alpha$  jest kątem ostrym.

Zatem  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sqrt{15}}$  i stąd  $3 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha = 3 + 2 \cdot \frac{1}{15} = \frac{47}{15}$ .

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy obliczy  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ .

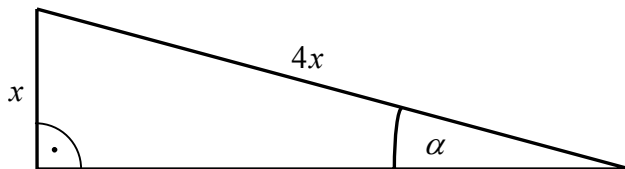
**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy obliczy wartość wyrażenia  $3 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha$  i zapisze wynik w postaci:  $3 + 2 \cdot \frac{1}{15}$ ,  $3 \frac{2}{15}$  lub  $\frac{47}{15}$ .

## **II sposób rozwiązania**

Rysujemy trójkąt prostokątny, w którym oznaczamy przyprostokątną  $x$  i przeciwprostokątną  $4x$  oraz zaznaczamy kąt ostry  $\alpha$  tak, aby  $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ .

Uwaga: Zdający może oznaczyć długości odpowiednich boków liczbami 1 oraz 4.



Z twierdzenia Pitagorasa wyznaczamy długość drugiej przyprostokątnej:  $x\sqrt{15}$ .

Obliczamy wartości funkcji  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$ . Stąd  $3 + 2\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{47}{15}$ .

## **Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy poprawnie wyznaczy długość drugiej przyprostokątnej:  $x\sqrt{15}$ .

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy obliczy wartość wyrażenia  $3 + 2\operatorname{tg}^2 \alpha$  i zapisze wynik w postaci:  $3 + 2 \cdot \frac{1}{15}$ ,  $3 \frac{2}{15}$  lub  $\frac{47}{15}$ .

### **Uwaga:**

Akceptujemy sytuację, w której zdający odczytuje przybliżoną wartość  $\operatorname{tg} \alpha$  (na podstawie wartości  $\sin \alpha = \frac{1}{4}$  zdający może przyjąć  $\operatorname{tg} \alpha \approx \operatorname{tg} 14^\circ \approx 0,2493$  albo  $\operatorname{tg} \alpha \approx \operatorname{tg} 15^\circ \approx 0,2679$ , może również przyjąć przybliżenie z mniejszą dokładnością, ale nie mniejszą niż do jednego miejsca po przecinku) i na tej podstawie obliczyć wartość wyrażenia  $3 + 2\operatorname{tg}^2 \alpha$  stosując poprawnie regułę zaokrąglania.

**Zadanie 27. (2 punkty)**

Liczby  $2x+1$ ,  $6$ ,  $16x+2$  są w podanej kolejności pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz  $x$ .

**I sposób rozwiązania**

Z własności ciągu arytmetycznego wynika, że drugi wyraz ciągu jest średnią arytmetyczną wyrazu pierwszego i wyrazu trzeciego. A zatem  $\frac{(2x+1)+(16x+2)}{2} = 6$ , stąd  $x = \frac{1}{2}$

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy zapisze równanie wynikające z własności lub z definicji ciągu arytmetycznego np.:

$$\frac{(2x+1)+(16x+2)}{2} = 6 \quad \text{lub} \quad 6 - (2x+1) = (16x+2) - 6.$$

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy obliczy  $x = \frac{1}{2}$ .

**II sposób rozwiązania**

Zapisujemy układ równań

$$\begin{cases} 2x+1+r = 6 \\ 2x+1+2r = 16x+2 \end{cases}$$

Stąd  $x = \frac{1}{2}$ .

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy zapisze układ równań, np.:

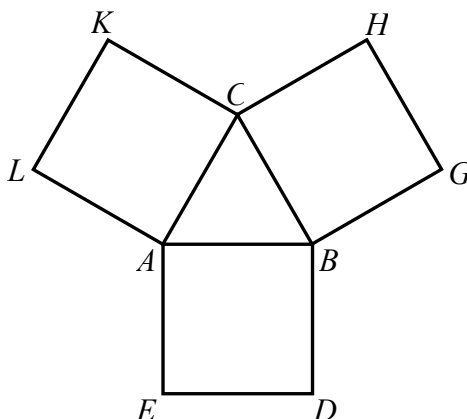
$$\begin{cases} 2x+1+r = 6 \\ 2x+1+2r = 16x+2 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} 2x+1+r = 6 \\ 6+r = 16x+2 \end{cases}$$

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

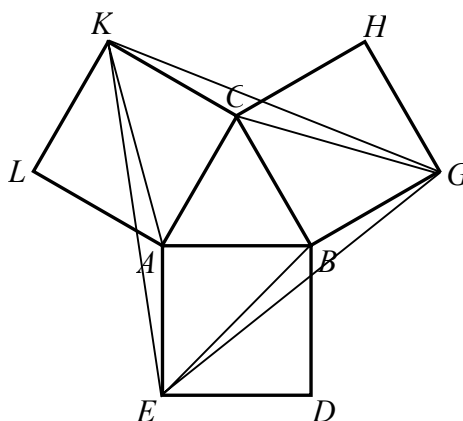
gdy obliczy  $x = \frac{1}{2}$ .

**Zadanie 28. (2 punkty)**

Na bokach trójkąta równobocznego  $ABC$  (na zewnątrz tego trójkąta) zbudowano kwadraty  $ABDE$ ,  $BGHC$  i  $ACKL$ . Udowodnij, że trójkąt  $KGE$  jest równoboczny.



**Rozwiązanie:**



Rysujemy odcinki  $KG$ ,  $CG$ ,  $GE$ ,  $BE$ ,  $KE$  i  $KA$ .

- Odcinki  $KC$ ,  $GB$  i  $AE$  są bokami kwadratów zbudowanych na bokach trójkąta równobocznego, więc  $|KC| = |GB| = |AE|$ .
- Odcinki  $CG$ ,  $BE$  i  $AK$  są przekątnymi tych kwadratów, więc  $|CG| = |BE| = |AK|$ .
- $|\sphericalangle GCK| = 360^\circ - (|\sphericalangle ACK| + |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle BCG|) = 360^\circ - 90^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 165^\circ$ .  
Analogicznie dowodzimy, że  $|\sphericalangle GBE| = |\sphericalangle EAK| = 165^\circ$ .
- Korzystając z cechy (*bok, kąt, bok*) przystawiania trójkątów stwierdzamy, że trójkąty  $KCG$ ,  $GBE$  i  $AEK$  są przystające, więc  $|KG| = |GE| = |EK|$ .

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy zapisze, że trójkąty  $KCG$ ,  $GBE$  i  $AEK$  są przystające i wyciągnie wniosek, że  $|KG| = |GE| = |EK|$ , lecz nie poda pełnego uzasadnienia równości odpowiednich kątów lub boków.

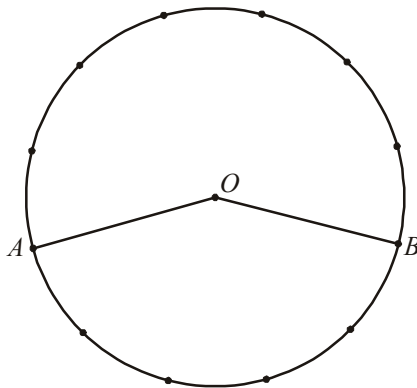
**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy przeprowadzi pełny dowód.

**Zadanie 29. (2 punkty)**

Punkty  $A$  i  $B$  leżą na okręgu o środku  $O$  i dzielą ten okrąg na dwa łuki, których stosunek długości jest równy 7:5. Jaka jest miara kąta środkowego opartego na krótszym łuku?

**Rozwiązanie**



Krótszy łuk to  $\frac{5}{12}$  okręgu, zatem kąt środkowy oparty na tym łuku to  $\frac{5}{12}$  kąta pełnego, tj.

$$\frac{5}{12} \cdot 360^\circ = 150^\circ.$$

**Schemat oceniania**

Zdający otrzymuje ..... 1 pkt  
gdy:

- zapisze, że krótszy łuk  $AB$  to  $\frac{5}{12}$  okręgu

lub

- zapisze układ równań, np.:  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{5}$  i  $\alpha + \beta = 360^\circ$

lub

- zapisze, że dwa kolejne punkty zaznaczone na tym okręgu wraz z punktem  $O$  wyznaczają kąt środkowy o mierze  $30^\circ$

lub

- zapisze, że kąt środkowy oparty na dłuższym z łuków  $AB$  ma miarę  $210^\circ$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ..... 2 pkt

gdy obliczy miarę kąta środkowego opartego na krótszym z łuków  $AB$ :  $|\sphericalangle AOB| = 150^\circ$ .



**Zadanie 30. (2 punkty)**

Dane są dwa pudełka: czerwone i niebieskie. W każdym z tych pudełek znajduje się 10 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 10. Z każdego pudełka losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że numer kuli wylosowanej z czerwonego pudełka jest mniejszy niż numer kuli wylosowanej z niebieskiego pudełka.

**I sposób rozwiązania** (model klasyczny)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary liczb  $(a, b)$ , gdzie  $a, b \in \{1, 2, \dots, 10\}$ . Jest to model klasyczny.

$$|\Omega| = 10 \cdot 10$$

Zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi zdarzeniu  $A$  są pary liczb, w których na pierwszym miejscu jest liczba mniejsza niż na miejscu drugim.

Jeżeli na pierwszym miejscu jest liczba 1, to na drugim miejscu może być każda z liczb od 2 do 10. (Mamy więc 9 możliwości).

Jeżeli na pierwszym miejscu jest liczba 2, to na drugim miejscu może być każda z liczb od 3 do 10. (Mamy więc 8 możliwości).

Jeżeli na pierwszym miejscu jest liczba 3, to na drugim może być każda z liczb od 4 do 10. (Mamy więc 7 możliwości). itd.

$$\text{Zatem } |A| = 9 + 8 + 7 + \dots + 1 = 45.$$

$$\text{Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia } A: P(A) = 0,45 = \frac{9}{20}.$$

**II sposób rozwiązania** (metoda tabeli)

Wszystkie zdarzenia elementarne możemy wypisać w postaci kwadratowej tablicy.

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(1,7)	(1,8)	(1,9)	(1,10)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	(2,7)	(2,8)	(2,9)	(2,10)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(3,7)	(3,8)	(3,9)	(3,10)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)	(4,7)	(4,8)	(4,9)	(4,10)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)	(5,7)	(5,8)	(5,9)	(5,10)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)	(6,7)	(6,8)	(6,9)	(6,10)
(7,1)	(7,2)	(7,3)	(7,4)	(7,5)	(7,6)	(7,7)	(7,8)	(7,9)	(7,10)
(8,1)	(8,2)	(8,3)	(8,4)	(8,5)	(8,6)	(8,7)	(8,8)	(8,9)	(8,10)
(9,1)	(9,2)	(9,3)	(9,4)	(9,5)	(9,6)	(9,7)	(9,8)	(9,9)	(9,10)
(10,1)	(10,2)	(10,3)	(10,4)	(10,5)	(10,6)	(10,7)	(10,8)	(10,9)	(10,10)

albo

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		X	X	X	X	X	X	X	X	X
2			X	X	X	X	X	X	X	X
3				X	X	X	X	X	X	X
4					X	X	X	X	X	X
5						X	X	X	X	X
6							X	X	X	X
7								X	X	X
8									X	X
9										X
10										

Stąd  $|\Omega| = 10 \cdot 10$ .

Jest to model klasyczny.

Zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi zdarzeniu  $A$  są pary liczb, w których na pierwszym miejscu jest liczba mniejsza niż na miejscu drugim. Są to wszystkie pary liczb wyróżnione w pierwszej tabelicy lub zaznaczone w drugiej. Jest ich 45. Zatem  $P(A) = 0,45$ .

Uwaga:

Wszystkich par w tej tabelicy jest  $10^2$ , na przekątnej łączącej pary (1,1) i (10,10) jest ich 10, więc pozostałych par jest  $10^2 - 10$ . Nad przekątną jest tyle samo par co pod nią, więc par, w których na pierwszym miejscu jest liczba mniejsza niż na drugim jest  $\frac{10^2 - 10}{2}$ .

Zatem  $P(A) = 0,45$ .

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy obliczy  $|\Omega| = 10 \cdot 10$  albo  $|A| = 45$ .

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ :  $P(A) = 0,45 = \frac{9}{20}$ .

**Uwaga:**

- Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma  $P(A) > 1$ , to otrzymuje za całe rozwiązanie **0 punktów**.

**Zadanie 31. (5 punktów)**

Dwie szkoły mają prostokątne boiska. Przekątna każdego boiska jest równa 65 m. Boisko w drugiej szkole ma długość o 4 m większą niż boisko w pierwszej szkole, ale szerokość o 8 m mniejszą. Oblicz długość i szerokość każdego z tych boisk.

**Rozwiązanie**

Oznaczmy długość boiska w pierwszej szkole przez  $a$  i szerokość przez  $b$ .  
Wówczas w drugiej szkole długość boiska jest równa  $a + 4$ , szerokość  $b - 8$ .  
Otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 65^2 \\ (a + 4)^2 + (b - 8)^2 = 65^2 \end{cases}$$

Przekształcamy układ do postaci

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 65^2 \\ a^2 + 8a + 16 + b^2 - 16b + 64 = 65^2 \end{cases}$$

a następnie

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 65^2 \\ a^2 + b^2 + 8a - 16b + 80 = 65^2 \end{cases}$$

skąd otrzymujemy układ

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 65^2 \\ 8a - 16b + 80 = 0 \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 65^2 \\ a = 2b - 10 \end{cases}$$

Podstawiamy wyznaczoną wartość  $a$  do pierwszego równania i rozwiązujemy równanie kwadratowe  $(2b - 10)^2 + b^2 = 65^2$ .

Po uporządkowaniu otrzymujemy:  $b^2 - 8b - 825 = 0$ ,  $\Delta = 3364$ ,  $\sqrt{\Delta} = 58$

Rozwiązaniami tego równania są liczby  $b = 33$  oraz  $b = -25$ . Odrzucamy ujemne rozwiązanie i obliczamy  $a = 56$ .

Zatem boisko w pierwszej szkole ma 33 m szerokości i 56 metrów długości, a więc boisko w drugiej szkole ma 25 m szerokości i 60 m długości.

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 pkt**

Zapisanie jednego z równań  $a^2 + b^2 = 65^2$  lub  $(a + 4)^2 + (b - 8)^2 = 65^2$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zapisanie układu równań z niewiadomymi  $a$  i  $b$ , np.: 
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 65^2 \\ (a+4)^2 + (b-8)^2 = 65^2 \end{cases}$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zapisanie równania z jedną niewiadomą  $a$  lub  $b$  w postaci:  $(2b-10)^2 + b^2 = 65^2$  lub

$$b^2 - 8b - 825 = 0 \text{ lub } a^2 + \left(\frac{1}{2}a + 5\right) = 65^2 \text{ lub } \frac{1}{4}a^2 + a - 840 = 0.$$

**Uwaga:**

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania zadania (np. błędy rachunkowe)..... 4 pkt**

- zdający obliczy wymiary boiska w pierwszej szkole i na tym poprzestanie lub błędnie obliczy wymiary boiska w drugiej szkole

albo

- zdający obliczy wymiary boiska w pierwszej szkole z błędem rachunkowym i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy wymiary boiska w drugiej szkole.

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

Obliczenie wymiarów boisk w obu szkołach:

Boisko w pierwszej szkole ma 33 m szerokości i 56 metrów długości, natomiast boisko w drugiej szkole ma 25 m szerokości i 60 m długości.

**Uwaga:**

Jeśli zdający odgadnie poprawne wymiary boisk, to otrzymuje **1 punkt**.

**Zadanie 32. (4 punkty)**

Ile jest liczb pięciocyfrowych, spełniających jednocześnie następujące cztery warunki:

- (1) cyfry setek, dziesiątek i jedności są parzyste,
- (2) cyfra setek jest większa od cyfry dziesiątek,
- (3) cyfra dziesiątek jest większa od cyfry jedności,
- (4) w zapisie tej liczby nie występuje cyfra 9.

**Rozwiązanie**

Trzy ostatnie cyfry są parzyste i uporządkowane malejąco. Mamy więc 10 możliwości ustawienia tych cyfr tak, by spełnione były warunki (1), (2) i (3):

– – 4 2 0  
– – 6 2 0  
– – 8 2 0  
– – 6 4 0  
– – 8 4 0  
– – 8 6 0  
– – 6 4 2  
– – 8 4 2  
– – 8 6 2  
– – 8 6 4

Pierwszą cyfrą liczby może być dowolna spośród cyfr: 1, 2, ..., 8, a drugą dowolna spośród cyfr: 0, 1, 2, ..., 8.

Mamy więc  $8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$  możliwości utworzenia liczb spełniających podane warunki.

**Uwaga:** Trzy wybrane cyfry parzyste można ustawić w porządku malejącym dokładnie na jeden sposób. Tak więc liczba tych możliwych jest równa  $\binom{5}{3} = 10$ .

**Schemat oceniania**

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch etapów.

Pierwszy z nich polega na obliczeniu

- liczby możliwości ustawienia trzech cyfr parzystych spełniających warunki (1), (2) i (3); tych możliwości jest 10.
- liczby możliwości wyboru pierwszej cyfry liczby pięciocyfrowej; tych możliwości jest 8.
- liczby możliwości wyboru drugiej cyfry liczby pięciocyfrowej; tych możliwości jest 9.

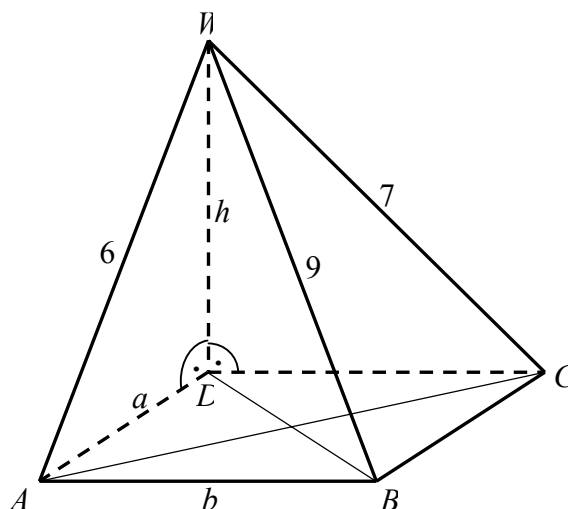
Za obliczenie każdej z tych liczb, zdający otrzymuje 1 punkt.

Drugi etap polega na wykorzystaniu reguły mnożenia i stwierdzeniu, że liczb pięciocyfrowych, spełniających jednocześnie warunki (1), (2), (3) i (4) jest 720. Za tę część zdający otrzymuje 1 punkt.

**Zadanie 33. (4 punkty)**

Podstawą ostrosłupa  $ABCDW$  jest prostokąt  $ABCD$ . Krawędź boczna  $DW$  jest wysokością tego ostrosłupa. Krawędzie boczne  $AW$ ,  $BW$  i  $CW$  mają następujące długości:  $|AW|=6$ ,  $|BW|=9$ ,  $|CW|=7$ . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

**I sposób rozwiązania**



Oznaczmy długości krawędzi ostrosłupa  $|AD|=a$ ,  $|AB|=b$  i  $|DW|=h$ .

Trójkąty  $BAW$  i  $BCW$  są prostokątne, więc korzystając dwukrotnie z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równania  $a^2 + 49 = 81$  i  $b^2 + 36 = 81$ .

Stąd otrzymujemy  $a = 4\sqrt{2}$  oraz  $b = 3\sqrt{5}$ .

Wysokość ostrosłupa obliczymy korzystając z twierdzenia Pitagorasa np. dla trójkąta  $ADW$ .

$$h = \sqrt{6^2 - (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{36 - 32} = 2.$$

Objętość ostrosłupa jest więc równa

$$V = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot 2 = 8\sqrt{10}.$$

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

Wykorzystanie faktu, że trójkąty  $BAW$  i  $BCW$  są prostokątne i **zapisanie przynajmniej jednego równania**, z którego można obliczyć długość krawędzi podstawy ostrosłupa, np.:  
 $a^2 + 49 = 81$  albo  $b^2 + 36 = 81$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Obliczenie długości obu krawędzi podstawy ostrosłupa:  $a = 4\sqrt{2}$  i  $b = 3\sqrt{5}$ .

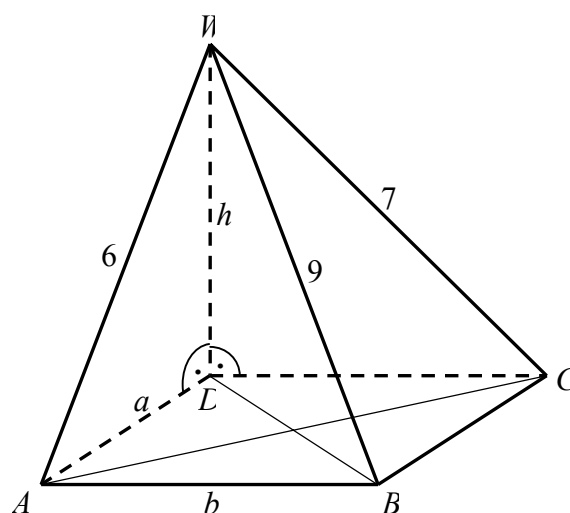
**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Obliczenie długości wszystkich odcinków potrzebnych do obliczenia objętości ostrosłupa:  
 $h = 2$ ,  $a = 4\sqrt{2}$ ,  $b = 3\sqrt{5}$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Obliczenie objętości ostrosłupa:  $V = 8\sqrt{10}$ .

## II sposób rozwiązania



Oznaczmy długości krawędzi ostrosłupa  $|AD| = a$ ,  $|AB| = b$  i  $|DW| = h$ .

Trójkąty  $ADW$ ,  $CDW$ ,  $BDW$  i  $BAD$  są prostokątne, więc korzystając czterokrotnie z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a^2 + h^2 = 36 \\ b^2 + h^2 = 49 \\ a^2 + b^2 + h^2 = 81 \end{cases}$$

Dodajemy pierwsze i drugie równania stronami i podstawiamy  $a^2 + b^2 = 85 - 2h^2$  do trzeciego równania. Otrzymamy  $h^2 = 4$ , więc  $h = 2$ .

Podstawiając  $h = 2$  do pozostałych równań, obliczamy  $a = 4\sqrt{2}$  oraz  $b = 3\sqrt{5}$ .

Objętość ostrosłupa jest więc równa

$$V = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot 2 = 8\sqrt{10}.$$

## Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

Zapisanie układu równań, z którego można obliczyć długości wszystkich odcinków

potrzebnych do obliczenia objętości ostrosłupa, np.:

$$\begin{cases} a^2 + h^2 = 36 \\ b^2 + h^2 = 49 \\ a^2 + b^2 + h^2 = 81 \end{cases}.$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Obliczenie z powyższego układu jednej z niewiadomych, np.:  $h = 2$  albo  $a = 4\sqrt{2}$  albo  $b = 3\sqrt{5}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Obliczenie długości wszystkich odcinków potrzebnych do obliczenia objętości ostrosłupa:

$$h = 2, a = 4\sqrt{2}, b = 3\sqrt{5}.$$

**Rozwiązanie pełne** ..... **4 pkt**

Obliczenie objętości ostrosłupa:  $V = 8\sqrt{10}$ .

**Uwaga:**

Jeśli zdający błędnie zaznaczy na rysunku długości krawędzi (zamieni 9 z 6 lub 9 z 7) albo błędnie zinterpretuje treść zadania pisząc np.:  $a^2 + 9^2 = 7^2$ , to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.