

Ocena niepewności pomiarów w praktyce (ONPwP)  
w I Pracowni Fizycznej

Andrzej Szczepkowicz  
Wydział Fizyki i Astronomii  
Uniwersytet Wrocławski

2016; aktualizacja 23 kwietnia 2018

## Spis treści

<b>1</b>	<b>Dwa podejścia</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Jak niepewność <math>x</math> wpływa na niepewność <math>y = f(x)</math>?</b>	<b>3</b>
2.1	Metoda elementarna . . . . .	3
2.2	Metoda różniczkowa . . . . .	4
2.3	Odchylenie względne $\Delta x/x$ . . . . .	4
2.4	Jak odchylenia względne przenoszą się z argumentu na wynik?	4
<b>3</b>	<b>Ocena niepewności maksymalnej <math>\Delta(\dots)</math></b>	<b>5</b>
3.1	Z jaką dokładnością mierzymy? . . . . .	5
3.1.1	Pomiar długości . . . . .	5
3.1.2	Pomiar czasu . . . . .	6
3.1.3	Pomiar temperatury . . . . .	6
3.1.4	Ważenie . . . . .	6
3.1.5	Pomiar napięcia i natężenia prądu . . . . .	6
3.2	Jak niepewność wielkości mierzonych wpływa na wynik? . . .	7
3.3	Przykład elementarny – wahadło matematyczne . . . . .	8
3.4	Przykład – Ćwiczenie 24 . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Podejście statystyczne – ocena niepewności standardowej <math>u(\dots)</math></b>	<b>13</b>
4.1	Odchylenie standardowe . . . . .	13
4.2	Niepewność standardowa $u(\dots)$ . . . . .	15
4.3	Niepewność rozszerzona $U(\dots)$ . . . . .	16
4.4	Z jaką dokładnością mierzymy? . . . . .	17
4.5	Jak niepewność wielkości mierzonych wpływa na wynik? . . .	17
4.6	Regresja liniowa . . . . .	18
4.7	Przykład – Ćwiczenie 9 . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Literatura</b>	<b>24</b>
<b>A</b>	<b>Dodatki</b>	<b>24</b>
A.1	Związek między odchyleniem standardowym sumy a odchyleniami standardowymi składników . . . . .	24
A.2	Rozkład normalny: $\sigma, 2\sigma, 3\sigma$ . . . . .	25
A.3	Rozkład jednostajny: $\sigma_z = \Delta z/\sqrt{3}$ . . . . .	27

## 1 Dwa podejścia

Istnieją zasadniczo dwie filozofie oceny niepewności pomiarowej: albo posługujemy się *niepewnościami maksymalnymi*, albo stosujemy analizę statystyczną i posługujemy się *niepewnościami standardowymi*. Warto znać i rozumieć obie metody.

Podejście pierwsze opiszemy w rozdziale 3. Bywa ono stosowane już na lekcjach fizyki w szkole średniej, gdyż jest pojęciowo i rachunkowo prostsze.

Drugie podejście opiszemy w rozdziale 4. Jest ono związane ze znanym już z lekcji matematyki w szkole pojęciem *odchylenia standardowego*. Metoda ta jest zalecana do stosowania w pracach naukowych.

Niezależnie od tego, którą filozofią będziemy się posługiwać, powinniśmy umieć odpowiadać na pytanie:

## 2 Jak niepewność $x$ wpływa na niepewność $y = f(x)$ ?

### 2.1 Metoda elementarna

Załóżmy, że chcemy wyznaczyć objętość kuli  $V$  na podstawie pomiaru jej średnicy  $x$ . Posłużymy się wzorem na objętość kuli wyrażonym jako funkcja średnicy:  $V = f(x) = \frac{1}{6}\pi x^3$ . Jeżeli  $x = 2.50$  mm, to  $f(x) = 8.18$  mm<sup>3</sup>. Gdyby jednak z pomiaru wyszło nieco więcej:  $x = 2.55$  mm, to  $f(x) = 8.68$  mm<sup>3</sup>. Widzimy więc, że jeżeli wynik pomiaru odchyli się o  $\Delta x = +0.05$  mm, to wynik obliczenia odchyli się o  $+0.50$  mm<sup>3</sup>.

Mamy zatem bardzo prosty sposób określenia, jak odchylenie wartości argumentu wpływa („przenosi się”) na odchylenie wartości funkcji:

$$f(x + \Delta x) - f(x) \tag{1}$$

Rachunki nie sprawiają trudności:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{6}\pi(x + \Delta x)^3 - \frac{1}{6}\pi(x)^3 = \frac{1}{6}\pi[2.55^3 - 2.50^3] = +0.50 \text{ jednostki: } (\text{mm})^3 = \text{mm}^3. \tag{2}$$

Dopóki  $\Delta x$  jest małe w porównaniu z  $x$ , wartość bezwzględna odchylenia  $|f(x + \Delta x) - f(x)|$  prawie nie zależy od znaku  $\Delta x$ . Dla przeciwnego odchylenia  $\Delta x = -0.05$  mm otrzymujemy

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{6}\pi(x + \Delta x)^3 - \frac{1}{6}\pi(x)^3 = \frac{1}{6}\pi[2.45^3 - 2.50^3] = -0.48 \tag{3}$$

Wartości bezwzględne odchyżeń (2) i (3) są sobie bliskie.

## 2.2 Metoda różniczkowa

Odchylenie obliczanej wartości można wyznaczyć także w inny sposób:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \Delta x \approx \frac{df}{dx} \Delta x, \quad (4)$$

gdzie użyliśmy pojęcia pochodnej funkcji:  $f'(x) = \frac{df}{dx}$ . Różniczkowy sposób obliczania ma pewne zalety nad sposobem elementarnym: jest symetryczny, to znaczy nie rozróżnia dodatnich i ujemnych odchyień wielkości  $x$ , a ponadto często prowadzi do prostszych obliczeń liczbowych<sup>1</sup>. Ta metoda jest przykładem często stosowanej w fizyce linearyzacji problemu: przyjmujemy dla uproszczenia, że w otoczeniu pewnego punktu funkcja zmienia się linowo.

Zastosujmy metodę różniczkową do przykładu z kulą. Najpierw obliczamy pochodną:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{6} \pi x^3 \right) = \frac{1}{2} \pi x^2. \quad (5)$$

Teraz już możemy obliczyć odchylenie obliczanej wartości:

$$\frac{df}{dx} \Delta x = \frac{1}{2} \pi x^2 \Delta x = \frac{1}{2} \pi (2.50^2)(0.05) = 0.49. \quad (6)$$

Czytelnik powinien porównać wyniki (2), (3) i (6).

## 2.3 Odchylenie względne $\Delta x/x$

Jeżeli mamy monetę o średnicy  $x = 2$  cm i pomylimy się przy pomiarze tej średnicy o  $\Delta x = 1$  cm, to nasza pomyłka będzie znaczna. Jeżeli jednak przy pomiarze pokoju o wysokości  $x = 250$  cm pomylimy się o tyle samo:  $\Delta x = 1$  cm, to nasz błąd będzie bez znaczenia. O tym, czy odchylenie wyniku pomiaru jest znaczne świadczy *odchylenie względne*: w pierwszym przypadku mamy  $\frac{\Delta x}{x} = \frac{1 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = 0.5 = 50\%$ , a w drugim zaledwie  $\frac{\Delta x}{x} = \frac{1 \text{ cm}}{250 \text{ cm}} = 0.004 = 0.4\%$ . Gdy w naszym sprawozdaniu we wnioskach komentujemy niepewność pomiaru, warto podać niepewność *względną* naszego wyniku.

## 2.4 Jak odchylenia względne przenoszą się z argumentu na wynik?

By odpowiedzieć na powyższe pytanie, zawsze możemy posłużyć się metodą z rozdziału 2.1 lub 2.2 i następnie wykonać dwa dzielenia:  $\Delta x/x$  i  $\Delta y/y$ .

---

<sup>1</sup>Bywają jednak zagadnienia, gdzie metoda elementarna jest prostsza od metody różniczkowej, na przykład dla zależności  $f(x) = (a^2 - x^2)/(b^2 - x^2)$ , którą napotkamy w naszej pracowni w ćwiczeniu 11.

Jeżeli jednak zależność funkcyjna ma postać  $y = ax^k$ , tak jak w omawianym wcześniej przykładzie z kulą ( $y = \frac{1}{6}\pi x^3$ ), istnieje znacznie prostsza metoda:

$$y = ax^k \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta y}{y} \approx k \frac{\Delta x}{x} \quad (7)$$

Dla przykładu z kulą  $k = 3$ , zatem 1-procentowe odchylenie przy pomiarze średnicy powoduje 3-procentowe odchylenie obliczonej objętości kulki. Jest to bardzo prosta i przydatna w praktyce reguła.

Wzór (7) nietrudno uzasadnić:  $f(x) = ax^k \Rightarrow df/dx = kax^{k-1} \Rightarrow \Delta f \approx kax^{k-1}\Delta x \Rightarrow \Delta f/f \approx (kax^{k-1}\Delta x)/(ax^k) = k\Delta x/x$ .

Oto przykłady zastosowania wzoru (7). Niech  $f(x) = 30x = 30x^1$ ,  $V(x) = \frac{1}{6}\pi x^3$ ,  $g(x) = 8\sqrt{x} = 8x^{0.5}$ ,  $h(x) = \frac{12}{\sqrt{x}} = 12x^{-0.5}$ . Jeżeli  $x$  rośnie o 1%, wówczas  $f$  rośnie o 1%,  $V$  rośnie o 3%,  $g$  rośnie o 0.5%, a  $h$  maleje o 0.5%.

### 3 Ocena niepewności maksymalnej $\Delta(\dots)$

W poprzednim rozdziale  $\Delta x$  oznaczało odchylenie, które może być zarówno dodatnie, jak i ujemne. Od tej chwili symbole  $\Delta x, \Delta y, \dots$  będą oznaczały wartość bezwzględną największego możliwego odchylenia wyniku pomiaru od rzeczywistości, czyli *niepewność maksymalną*.

#### 3.1 Z jaką dokładnością mierzymy?

Notując wynik pomiaru w I pracowni fizycznej powinniśmy jednocześnie zanotować jego niepewność. Będzie to później potrzebne do opracowania wyników.

##### 3.1.1 Pomiar długości

Przy starannym pomiarze średnicy monety szkolną linijką można przyjąć, że niepewność maksymalna pomiaru wynosi 0.5 mm. Jeżeli wynikiem pomiaru jest 42.5 mm, zapisujemy to następująco:

$$\begin{aligned} x &= 42.5 \text{ mm}, \quad \Delta x = 0.5 \text{ mm} \\ \text{lub} & \\ x &= (42.5 \pm 0.5) \text{ mm}. \end{aligned} \quad (8)$$

Jeżeli użyjemy tej samej linijki do pomiaru średnicy piłeczki pingpongowej, to wynik będzie obarczony większą niepewnością maksymalną  $\Delta x$  ze względu na trudność przyłożenia linijki do piłeczki. Przykład ten pokazuje, że nie zawsze najmniejsza podziałka przyrządu (działka elementarna) ma związek z dokładnością pomiaru. Eksperymentator musi sam ocenić  $\Delta x$  w zależności od sposobu, w jaki wykonuje pomiar.

### 3.1.2 Pomiar czasu

Gdy stoper jest włączany i wyłączany przez czujnik, wówczas niepewność maksymalna pomiaru czasu  $\Delta t$  wynosi 0.01 s lub mniej, w zależności od stopera.

Czas reakcji człowieka jest rzędu 0.10 s, ale różnice czasów reakcji przy starannym wykonywaniu ćwiczenia nie przekraczają 0.05 s i taką niepewność maksymalną można przyjąć przy ręcznym pomiarze czasu. Najlepiej jednak, jeżeli eksperymentator sam oceni niepewność uwzględniając specyfikę ćwiczenia i przebieg swoich pomiarów. Jeżeli czas pozwoli, warto zastosować podejście statystyczne i ocenić niepewność standardową pomiaru czasu (zob. rozdział 4).

### 3.1.3 Pomiar temperatury

W ćwiczeniach na naszej pracowni najczęściej istotna jest nie wartość temperatury, ale jej przyrosty. W takiej sytuacji za niepewność maksymalną odczytu temperatury możemy przyjąć działkę elementarną termometru – najczęściej jest to  $0.1^{\circ}\text{C}$  i wówczas  $\Delta T_{\text{pocz}} = 0.1^{\circ}\text{C}$  oraz  $\Delta T_{\text{końc}} = 0.1^{\circ}\text{C}$ .

W wyjątkowych przypadkach, w których ważny jest nie przyrost temperatury, ale jej wartość, za niepewność maksymalną przyjmujemy  $1^{\circ}\text{C}$ .

### 3.1.4 Ważenie

W naszej pracowni mamy dobrej jakości wagę z wyświetlaczem cyfrowym. Za niepewność maksymalną pomiaru masy możemy przyjąć działkę elementarną tej wagi, czyli 0.1 g.

### 3.1.5 Pomiar napięcia i natężenia prądu

Jeżeli chcielibyśmy być skrupulatni, to dla cyfrowych woltomierzy i amperomierzy powinniśmy zajrzeć do instrukcji miernika, by się dowiedzieć, jaka jest niepewność jego wskazań w zależności od użytego zakresu pomiarowego i wartości mierzonej wielkości (por. Instrukcja ONP, rozdział 4.2.1.), co podczas zajęć w I pracowni byłoby kłopotliwe; z kolei w przypadku mierników analogowych (rzadko już występujących w pracowni) powinniśmy się posłużyć pojęciem klasy przyrządu, tak jak to opisano w starszych podręcznikach do zajęć laboratoryjnych (zob. także Instrukcja ONP, rozdział 4.2.1.). Jednocześnie nasuwa się kłopotliwe pytanie, kiedy ostatnio używany miernik był wzorcowany.

W praktyce, w naszej pracowni można przyjąć następującą uproszczoną regułę oceny niepewności maksymalnej dla pomiarów napięcia i natężenia prądu:

$$\Delta x = 1\% \text{ wyniku pomiaru} + 1 \text{ działka elementarna.} \quad (9)$$

Jeżeli wskazanie miernika nie jest stabilne (może się wahać np. z powodu niestabilności zasilacza), wówczas niepewność maksymalną zwiększamy o amplitudę wahań odczytu.

Przykład. Wskazanie woltomierza w chwili odczytu wynosi  $U = 47.32 \text{ mV}$ , ale waha się w zakresie 46–48 mV. Szacujemy niepewność maksymalną:

$$\begin{aligned}\Delta U &= 1\% \text{ z } U + \text{działka elementarna} + \text{amplituda wahań} \\ &= 1\% \text{ z } 47 \text{ mV} + 0.01 \text{ mV} + \frac{48-46}{2} \text{ mV} = \\ &= 0.47 \text{ mV} + 0.01 \text{ mV} + 1 \text{ mV} = 1.48 \text{ mV};\end{aligned}$$

wynik zaokrąglamy do dwóch cyfr znaczących:  $\Delta U = 1.5 \text{ mV}$ . Zwróćmy uwagę, że niepewność maksymalna  $\Delta U$  jest znacznie większa niż rozdzielczość odczytu (0.01 mV). Nawet w miernikach cyfrowych wysokiej klasy nie można utożsamić rozdzielczości wyświetlacza z niepewnością pomiaru.

### 3.2 Jak niepewność wielkości mierzonych wpływa na wynik?

W przykładzie opisanym w rozdziale 2 wielkość obliczana (objętość kulki) zależy tylko od jednej wielkości mierzonej (średnicy). Niepewność maksymalna objętości  $\Delta y$  zależy od niepewności maksymalnej pomiaru średnicy  $\Delta x$  i możemy ją łatwo wyznaczyć jedną z metod opisanych w rozdziale 2. Jeżeli używamy metody różniczkowej, zależność między niepewnościami maksymalnymi możemy na podstawie wzoru (4) zapisać następująco:

$$\Delta y = \left| \frac{dy}{dx} \right| \Delta x. \quad (10)$$

Dla funkcji o szczególnej postaci  $y = ax^k$  (zob. wzór 7) nie ma konieczności obliczania pochodnej:

$$y = ax^k \quad \Rightarrow \quad \Delta y = y \cdot |k| \frac{\Delta x}{x} \quad (11)$$

Zawsze też możemy użyć metody elementarnej (zob. wzór 1):

$$\Delta y = |y(x + \Delta x) - y(x)| \quad (12)$$

Wartość bezwzględne w trzech powyższych wzorach biorą się stąd, że teraz  $\Delta x$  i  $\Delta y$  oznaczają wielkości zawsze dodatnie: niepewności maksymalne.

Zazwyczaj wielkość fizyczna  $y$  wyznaczana w ćwiczeniu zależy nie od jednej, lecz od kilku wielkości mierzonych bezpośrednio:  $y = f(x_1, x_2, \dots)$ . Wówczas każda z niepewności pomiarowych  $\Delta x_i$  wnosi swój przyczynek do całkowitej niepewności pomiarowej  $\Delta y$ ; oznaczmy ten przyczynek  $\Delta y_i$ . Może się zdarzyć, że odchylenia wielkości  $y$  powodowane przez odchylenia pomiarowe  $x_i$  i  $x_j$  mają przeciwne znaki i częściowo się znoszą, jednak przy szacowaniu niepewności maksymalnej zakładamy najmniej korzystną sytuację, czyli taką, że odchylenia wielkości  $y$  mają ten sam znak i są maksymalne. Zatem sumujemy niepewności powodowane przez poszczególne wielkości mierzone:

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 + \dots, \quad (13)$$

czyli

$$\Delta y = \left| \frac{\partial y}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial y}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 + \dots, \quad (14)$$

przy czym różniczkowanie cząstkowe  $\frac{\partial y}{\partial x_1}$  wykonujemy w ten sposób, że chwilowo uznajemy  $y$  za funkcję tylko jednej zmiennej  $x_1$ ; obliczamy pochodną  $y$  względem zmiennej  $x_1$ , wszystkie pozostałe wielkości uważając za stałe; analogicznie postępujemy przy drugim różniczkowaniu  $\frac{\partial y}{\partial x_2}$  itd.

Jeżeli chcemy uniknąć różniczkowania, wówczas przyczynki  $\Delta y_i$  obliczamy metodą elementarną i zamiast (14) obliczamy

$$\begin{aligned} \Delta y = & |y(x_1 + \Delta x_1, x_2, \dots) - y(x_1, x_2, \dots)| + \\ & + |y(x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots) - y(x_1, x_2, \dots)| + \dots, \end{aligned} \quad (15)$$

Dla funkcji o szczególnej postaci  $y = ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots$ , zamiast stosować wzór (14) lub (15), znacznie łatwiej jest obliczać względne niepewności maksymalne:

$$y = ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots \Rightarrow \frac{\Delta y}{y} = |k_1| \frac{\Delta x_1}{x_1} + |k_2| \frac{\Delta x_2}{x_2} + \dots \quad (16)$$

Czytelnik może wywnioskować wzór (16) ze wzoru (14), jeżeli sprawdzi najpierw, że  $\partial y / \partial x_i = k_i y / x_i$ .

### 3.3 Przykład elementarny – wahadło matematyczne

Okres wahadła matematycznego (czyli czas jednego pełnego wahnięcia) wyraża się wzorem

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (17)$$

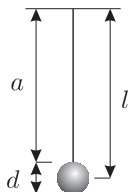
gdzie  $l$  oznacza długość wahadła, natomiast  $g$  jest przyspieszeniem ziemskim. Z powyższej zależności można wyliczyć  $g$ :

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}. \quad (18)$$

Jak widać z (18), aby wyznaczyć  $g$ , wystarczy zmierzyć  $l$  i  $T$ .

Długość wahadła  $l$  mierzymy pośrednio (tak jest dokładniej): najpierw mierzymy długość nici  $a$ , potem średnicę kulki  $d$ ; stąd obliczamy

$$l = a + \frac{1}{2}d. \quad (19)$$





Okres wahań również mierzymy pośrednio: najpierw wyznaczamy czas pełnych dwudziestu wahań  $t_{20}$ ; stąd obliczamy

$$T = \frac{t_{20}}{20}. \quad (20)$$

Wyniki pomiarów są następujące:

$$\begin{aligned} t_{20} &= (20.69 \pm 0.2) \text{ s}, \\ d &= (25.2 \pm 0.3) \text{ mm}, \\ a &= (253 \pm 3) \text{ mm}, \end{aligned} \quad (21)$$

to znaczy  $t_{20} = 20.69$  s, niepewność maksymalna  $\Delta t_{20} = 0.2$  s itd.

Najpierw z (20) i (21) obliczamy okres:

$$T = 1.035 \text{ s} \quad (22)$$

Niepewność wyznaczenia okresu określimy metodą elementarną (wzór 12):

$$\Delta T = \left| \frac{t_{20} + \Delta t_{20}}{20} - \frac{t_{20}}{20} \right| = \frac{\Delta t_{20}}{20} = 0.01 \text{ s}, \quad (23)$$

co łącznie można zapisać jako

$$T = (1.035 \pm 0.01) \text{ s} \quad (24)$$

Teraz jest jasne, dlaczego warto mierzyć czas wielu wahań – nasza niepewność wyznaczenia okresu jest dwudziestokrotnie mniejsza od niepewności pomiaru czasu.

Rozumując podobnie, możemy na podstawie (21) zapisać, że

$$\frac{1}{2}d = (12.6 \pm 0.15) \text{ mm} \quad (25)$$

Teraz możemy obliczyć  $l$  i  $\Delta l$ :

$$l = a + \frac{1}{2}d = 265.6 \text{ mm} \quad (26)$$

Niepewność  $l$  jest sumą niepewności  $a$  i  $\frac{1}{2}d$ :

$$\Delta l = 3 \text{ mm} + 0.15 \text{ mm} = 3.15 = 3.2 \text{ mm} \approx 3 \text{ mm} \quad (27)$$

Jak widać, niepewność pomiaru średnicy jest w naszym przypadku zaniebawalna w porównaniu z niepewnością pomiaru długości nici. Niepewności zwykle zaokrąglamy do dwóch cyfr znaczących (cyfry „3” i „2” w zapisie 3.2 mm). W tym przypadku można także zaokrąglić  $\Delta l = 3$  mm – pamiętajmy, że  $\Delta a = 3$  mm było tylko oszacowaniem niepewności  $a$ , a dokładność tego oszacowania jest z pewnością mniejsza od dziesiątych części milimetra.

Teraz obliczamy przyspieszenie ziemskie  $g$ :

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 265.6 \text{ mm}}{(1.035 \text{ s})^2} = 9788 \frac{\text{mm}}{\text{s}^2} \quad (28)$$

Niepewność maksymalną  $g$  obliczymy metodą elementarną (wzór 15). Musimy policzyć przyczynek pochodzący od niepewności  $l$  i od niepewności  $T$ :

$$\Delta g = \underbrace{\left| \frac{4\pi^2(l + \Delta l)}{T^2} - \frac{4\pi^2 l}{T^2} \right|}_{111} + \underbrace{\left| \frac{4\pi^2 l}{(T + \Delta T)^2} - \frac{4\pi^2 l}{T^2} \right|}_{186} = 297 \frac{\text{mm}}{\text{s}^2} \quad (29)$$

Wynik końcowy powinniśmy zapisać w jednostkach podstawowych układu SI. Tylko jak go zaokrąglić?

$$\begin{aligned} g &= (9.788 \pm 0.297) \text{ m/s}^2 & \text{(a) ?} \\ g &= (9.79 \pm 0.30) \text{ m/s}^2 & \text{(b) ?} \\ g &= (9.8 \pm 0.3) \text{ m/s}^2 & \text{(c) ?} \end{aligned} \quad (30)$$

Biorąc pod uwagę wielkość niepewności  $g$  można stwierdzić, że trzecia cyfra po przecinku w zapisie (a) jest zupełnie niewiarygodna, żadnej informacji nie niesie. Taki zapis wyniku końcowego nie ma sensu. Zapis (b) jest zapisem standardowym – niepewność została zaokrąglona do dwóch cyfr znaczących. Jeżeli jednak niepewność nie została przeszacowana, to w warunkach pierwszej pracowni fizycznej wynik można także zapisać w postaci (c).

Zauważmy na koniec, że wykorzystana tutaj metoda obliczenia niepewności oparta na wzorze (15) jest metodą uniwersalną, ale akurat do wyznaczenia  $\Delta g$  nie jest metodą najprostszą. Wzór (18) ma postać iloczynową:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} = (4\pi^2) \cdot l^1 \cdot T^{-2}, \quad (31)$$

co zgodnie z (16) pozwala na szybkie obliczenie niepewności względnej:

$$\frac{\Delta g}{g} = \underbrace{\frac{\Delta l}{l}}_{1.13\%} + 2 \underbrace{\frac{\Delta T}{T}}_{0.97\%} = 3.07\% = 3.1\% \quad (32)$$

Teraz łatwo możemy określić  $\Delta g$ :

$$\Delta g = 3.07\% \cdot g = 300 \text{ mm/s}^2, \quad (33)$$

co dało praktycznie taki sam wynik, jak (29).

### 3.4 Przykład – Ćwiczenie 24

W Ćwiczeniu 24 o nieco mylącym tytule „Wyznaczanie mechanicznego równownika ciepła” bada się zamianę energii elektrycznej (dżule) na ciepło (kalorie). Celem ćwiczenia jest wyznaczenie współczynnika  $J$ :

$$J = \frac{\text{energia elektryczna wydzielona przez spiralę grzejną}}{\text{ciepło pochłonięte przez wodę i kalorymetr}}$$

$$J = \frac{U \cdot I \cdot t}{(m_k \cdot c_k + m_w \cdot c_w) \cdot (T_2 - T_1)} \quad (34)$$

$$\left[ \frac{\text{J}}{\text{cal}} \right] = \left[ \frac{\text{V} \cdot \text{A} \cdot \text{s}}{\text{g} \cdot \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot ^\circ\text{C}} \cdot ^\circ\text{C}} \right]$$

Wartości  $U$ ,  $I$ ,  $t$ ,  $m_k$ ,  $m_w$ ,  $T_2$  oraz  $T_1$  musimy zmierzyć. Ponadto do obliczenia  $J$  musimy odszukać w tablicach ciepło właściwe miedzi, z którego wykonany jest kalorymetr:  $c_k = 0.0917 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot ^\circ\text{C}}$ . Wartość ciepła właściwego wody  $c_w = 1 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot ^\circ\text{C}}$  wynika z dawnej definicji kalorii.

Przykładowe wyniki pomiarów zostały przedstawione w tabeli:

Lp.	Wielkość mierzona bezpośrednio	Niepewność maksymalna	Przyczynki do niepewności maksymalnej wielkości obliczonej
$i$	$x_i$	$\Delta x_i$	$\Delta y_i$
1	napięcie $U = 10.7 \text{ V}$	$\Delta U = 0.3 \text{ V}$	$\Delta J_1 = 0.22$
2	natężenie prądu $I = 1.40 \text{ A}$	$\Delta I = 0.04 \text{ A}$	$\Delta J_2 = 0.22$
3	czas ogrzewania $t = 335 \text{ s}$	można zaniedbać	można zaniedbać
4	masa kalorymetru $m_k = 91.8 \text{ g}$	$\Delta m_k = 0.1 \text{ g}$	$\Delta J_4 = 0.00$
5	masa wody $m_w = 122.0 \text{ g}$	$\Delta m_w = 0.2 \text{ g}$	$\Delta J_5 = 0.01$
6	temperatura początkowa $T_1 = 28.6^\circ\text{C}$	$\Delta T_1 = 0.1^\circ\text{C}$	$\Delta J_6 = 0.15$
7	temperatura końcowa $T_2 = 33.6^\circ\text{C}$	$\Delta T_2 = 0.5^\circ\text{C}$	$\Delta J_7 = 0.75$
Niepewność maksymalna wielkości obliczonej			$\Delta J = 1.35$

Najpierw obliczamy  $J$  ze wzoru (34):

$$J = \frac{10.7 \cdot 1.40 \cdot 335}{(91.8 \cdot 0.0917 + 122.0 \cdot 1) \cdot (33.6 - 28.6)} = 7.70 \left[ \frac{\text{J}}{\text{cal}} \right] \quad (35)$$

Następnie analizujemy niepewności maksymalne, na przykład tak:

Ad. 1.  $\Delta U$  szacujemy uproszczoną regułą (9) z rozdziału 3.1.5. Następnie

metodą różniczki obliczamy przyczynek do niepewności  $J$  pochodzący od niepewności  $U$ :

$$\Delta J_1 = \left| \frac{\partial J}{\partial U} \right| \Delta U = \frac{I \cdot t}{(m_k \cdot c_k + m_w \cdot c_w) \cdot (T_2 - T_1)} \Delta U = 0.22 \quad (36)$$

Ad. 2. Podobnie szacujemy  $\Delta I$  i obliczamy przyczynek do niepewności  $J$ :

$$\Delta J_2 = \left| \frac{\partial J}{\partial I} \right| \Delta I = \frac{U \cdot t}{(m_k \cdot c_k + m_w \cdot c_w) \cdot (T_2 - T_1)} \Delta U = 0.22 \quad (37)$$

Ad. 3. W tym ćwiczeniu patrzymy na termometr i odmierzamy czas dokładnym stoperem. Musimy go zatrzymać, gdy temperatura wzrośnie o  $5^\circ\text{C}$ . Niepewność związaną z momentem zatrzymania stopera możemy zatem uwzględnić w niepewności pomiaru temperatury, przyjmiemy więc  $\Delta t = 0$  s. Czytelnik może przyjąć inną ocenę  $\Delta t$ , uwzględniającą swój sposób wykonywania tego ćwiczenia.

Ad. 4. Przyjmujemy  $\Delta m_k = 0.1$  g (zob. rozdział 3.1) i obliczamy odpowiedni przyczynek:

$$\Delta J_4 = \left| \frac{\partial J}{\partial m_k} \right| \Delta m_k = \left| -\frac{U \cdot I \cdot t}{(m_k \cdot c_k + m_w \cdot c_w)^2 \cdot (T_2 - T_1)} \cdot c_k \right| \Delta m_k = 0.0005 \quad (38)$$

Ad. 5. Masa wody jest mniej pewna:  $\Delta m_w = 0.2$  g, bo jest to wynik odejmowania wyników dwóch wazów. Obliczamy przyczynek:

$$\Delta J_5 = \left| \frac{\partial J}{\partial m_w} \right| \Delta m_w = \left| -\frac{U \cdot I \cdot t}{(m_k \cdot c_k + m_w \cdot c_w)^2 \cdot (T_2 - T_1)} \cdot c_w \right| \Delta m_w = 0.012 \quad (39)$$

Ad. 6. Przyjmujemy  $\Delta T_1 = 0.1^\circ\text{C}$  (zob. rozdział 3.1).

$$\Delta J_6 = \left| \frac{\partial J}{\partial T_1} \right| \Delta T_1 = \left| \frac{U \cdot I \cdot t}{(m_k \cdot c_k + m_w \cdot c_w) \cdot (T_2 - T_1)^2} \cdot (-1) \right| \Delta T_1 = 0.15 \quad (40)$$

Ad. 7. Przyjmiemy tutaj  $\Delta T_1 = 0.5^\circ\text{C}$  ze względu na niejednorodną temperaturę w układzie.

$$\Delta J_7 = \left| \frac{\partial J}{\partial T_2} \right| \Delta T_2 = \left| \frac{U \cdot I \cdot t}{(m_k \cdot c_k + m_w \cdot c_w) \cdot (T_2 - T_1)^2} \cdot 1 \right| \Delta T_2 = 0.75 \quad (41)$$

Powyższa analiza jest tylko przykładem – czytelnik może przeprowadzić ją inaczej. Na przykład oszacowania  $\Delta J_1$  i  $\Delta J_2$  można uprościć poprzez wykorzystanie zależności (11), z kolei masy były ważone bardzo dokładnie ( $\Delta m/m \approx 0.1\%$ ) i ich niepewności można nie uwzględniać (oszczędność czasu!), natomiast przyczynki od niepewności temperatury łatwiej można obliczyć metodą elementarną (wzór 12).

Na końcu sumujemy przyczynki do  $\Delta J$  z ostatniej kolumny tabeli i obliczamy całkowitą niepewność maksymalną obliczonej wielkości:

$$\Delta J = \Delta J_1 + \dots + \Delta J_7 \quad (42)$$

Widać, że dominujący wkład do  $\Delta J$  wnosi niepewność pomiaru temperatury, a niepewność pomiaru masy można było zaniedbać. W ćwiczeniu uzyskaliśmy zatem wynik  $J = (7.70 \pm 1.35) \frac{\text{J}}{\text{cal}}$ . Teraz sprawdzamy wartość tablicową:  $J_{\text{tabl}} = 4.184 \frac{\text{J}}{\text{cal}}$ . Rząd wielkości się zgadza, co wskazuje na to, że nie popełniliśmy jakiegoś zasadniczego błędu w obliczeniach, na przykład myląc gramy z kilogramami. Jak to jednak możliwe, że rozbieżność naszego wyniku i wyniku tablicowego przekracza oszacowany przez nas błąd maksymalny? Nie jest to nic wyjątkowego na pierwszej pracowni. Otóż w ćwiczeniu 24 występuje dodatkowe zjawisko, którego prosta analiza teoretyczna prowadząca do wzoru 34 nie uwzględnia: spirala grzejna owinięta wokół naczynia z wodą przekazuje znaczącą część energii do otoczenia. Powinniśmy o tym napisać we wnioskach z przeprowadzonego ćwiczenia.

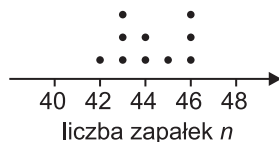
## 4 Podejście statystyczne – ocena niepewności standardowej $u(\dots)$

### 4.1 Odchylenie standardowe

Na początek policzmy zapalki w dziesięciu przyniesionych prosto ze sklepu pudełkach:

$$46, 44, 43, 44, 43, 46, 45, 46, 42, 43 \quad (43)$$

Przedstawmy rozkład liczby zapalek na diagramie:



Moglibyśmy zapisać, że  $x = 44 \pm 2$ . Jeżeli jednak kupimy więcej pudełek, zapewne okaże się, że w niektórych pudełkach jest 40 zapalek. Wówczas nasze oszacowanie błędu maksymalnego trzeba będzie zwiększyć dwukrotnie, z  $\Delta x = 2$  na  $\Delta x = 4$ . A co jeśli raz na milion pudełek zdarza się pudełko puste? Czy takie feralne pudełko powinno zmienić nasze oszacowanie niepewności liczby zapalek? Na tym przykładzie widać, że posługiwanie się pojęciem niepewności maksymalnej ma pewne wady.

Już w szkole średniej na lekcjach matematyki uczono nas innego sposobu określania rozrzutu wartości – takiego, który jest powszechnie przyjęty w

statystyce matematycznej. Obliczamy najpierw średnią liczbę zapalek:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (44)$$

Rozrzut wartości, czyli ich odchylenia od wartości średniej, określamy poprzez *odchylenie standardowe*:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad (45)$$

Ściśle rzecz biorąc, wzór (45) określa odchylenie standardowe „dla całej populacji” (musielibyśmy przeliczyć zapalki we wszystkich pudełkach z fabryki. . .). Natomiast jeżeli chcemy jak najlepiej oszacować odchylenie standardowe „w populacji” na podstawie jej próbki, używamy wzoru

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} \quad (46)$$

Zauważmy, że odchylenie standardowe ma taką samą jednostkę jak zmienna, której rozrzut badamy. Dla przykładu z zapalkami  $\bar{x} = 44.2$  [zapalki],  $\sigma_x = 1.5$  [zapalki].

Załóżmy, że wyniki pomiaru wielkości fizycznej  $x$  mają rozrzut charakteryzujący się odchyleniem standardowym  $\sigma_x$ ; podobnie, niech pomiary wielkości  $x'$  mają rozrzut  $\sigma_{x'}$ . Jeżeli obliczamy  $s = x + x'$ , to jaki będzie rozrzut  $\sigma_s$ ? Gdyby pomiary  $x$  i  $x'$  były w pełni skorelowane, na przykład gdyby wartość  $x'_i$  była zawsze dokładnie 5 razy większa od  $x_i$ , wówczas rozrzut sumy byłby sumą rozrzutów, ale dla zmiennych niezależnych od siebie rozrzut sumy będzie mniejszy:  $\sigma_s < \sigma_x + \sigma_{x'}$ , dlatego że odchylenia wyników  $x_i$  i  $x'_i$  nie zawsze są zgodne. Jak pokazano w dodatku A.1, odchylenia standardowe „sumują się kwadratowo”:

$$s = x + x' \quad \Rightarrow \quad \sigma_s^2 = \sigma_x^2 + \sigma_{x'}^2 \quad (47)$$

Na przykład, jeżeli  $\sigma_x = 1$  i  $\sigma_{x'} = 2$ , to  $\sigma_s = \sqrt{1^2 + 2^2} = 2.24$ .

Wróćmy jeszcze do przykładu z zapalkami. Jeżeli rozrzut liczby zapalek w pudełkach wynosi  $\sigma$ , to jaki jest rozrzut liczby zapalek w paczkach  $\sigma_p$ , które zawierają po 10 pudełek?

$$\sigma_p^2 = \underbrace{\sigma^2 + \sigma^2 + \dots + \sigma^2}_{10} \quad (48)$$

Zatem  $\sigma_p^2 = 10\sigma^2$ , czyli  $\sigma_p = 3.16\sigma$ .

Jeżeli wyniki pomiaru mają rozrzut, to warto zrobić serię pomiarów i obliczyć z nich średnią. Załóżmy teraz, że takich serii pomiarów wykonano wiele i otrzymano wyniki  $(\bar{x}_a, \bar{x}_b, \dots)$ . Jaki będzie rozrzut tych średnich  $\sigma_{\bar{x}}$ ? Znowu skorzystamy z tego, że odchylenia standardowe sumują się kwadratowo:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{n}x_1 + \frac{1}{n}x_2 + \dots + \frac{1}{n}x_n \Rightarrow \\ \sigma_{\bar{x}}^2 &= \left(\frac{1}{n}\sigma_x\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\sigma_x\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{n}\sigma_x\right)^2 \\ \sigma_{\bar{x}}^2 &= n\left(\frac{1}{n}\sigma_x\right)^2 = \frac{1}{n}\sigma_x^2\end{aligned}\tag{49}$$

Zatem rozrzut średnich jest mniejszy niż rozrzut pojedynczych pomiarów:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma_x.\tag{50}$$

## 4.2 Niepewność standardowa $u(\dots)$

Jeżeli dysponujemy serią  $n$  niezależnych pomiarów wielkości fizycznej  $x$ , wówczas za najlepsze oszacowanie wielkości  $x$  przyjmujemy średnią

$$x = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\tag{51}$$

Wynikowi temu przypisujemy *niepewność standardową*  $u(x)$ , która jest równa szacowanemu odchyleniu standardowemu średnich: (por. wzory 46 i 50)

$$u(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}\tag{52}$$

W praktyce użyteczne jest także pojęcie *względnej* niepewności standardowej:

$$u_r(x) = \frac{u(x)}{x}\tag{53}$$

(indeks  $r$  pochodzi od słowa *relative*).

Przykład. Oto wynik dziesięciokrotnego pomiaru średnicy kuli za pomocą śruby mikrometrycznej:

Średnica kuli $x$			
Wyniki pomiarów	Średnia	Niepewność standardowa	Względna niepewność standardowa
$x_i$ [mm]	$x$ [mm]	$u(x)$ [mm]	$u_r(x)$
48.12, 48.23, 48.47, 48.19, 48.38, 48.17, 48.21, 48.28, 48.28, 48.43	48.276	0.037	0.00076 = 0.076%

### 4.3 Niepewność rozszerzona $U(\dots)$

Załóżmy, że z naszych pomiarów wynika pewna wartość wielkości fizycznej  $x$  z niepewnością standardową  $u(x)$ . Jakie jest prawdopodobieństwo, że rzeczywista wartość leży w przedziale  $(x - u(x), x + u(x))$ ? Nie istnieje ogólna odpowiedź na to pytanie. Jeżeli wprowadzimy dodatkowe założenia: że mamy dużą ilość pomiarów i że pomiary wykazują przypadkowe odchylenia o rozkładzie normalnym, wówczas szukane prawdopodobieństwo wynosi 68% (zob. dodatek A.2). Jeżeli rozszerzamy przedział, prawdopodobieństwo rośnie:

przedział	prawdopodobieństwo dla rozkładu normalnego
$x - u(x), x + u(x)$	68.3%
$x - 2u(x), x + 2u(x)$	95.5%
$x - 3u(x), x + 3u(x)$	99.7%

*Niepewność rozszerzona*  $U(x)$  jest to niepewność standardowa  $u(x)$  pomnożona przez *współczynnik rozszerzenia*  $k$ , który zazwyczaj przyjmuje się za równy od 2 do 3. Wówczas wartość rzeczywista zawiera się w przedziale  $(x - U(x), x + U(x))$  ze znacznym prawdopodobieństwem. Wynik pomiaru możemy wówczas zapisać jako

$$x \pm U(x) \quad (54)$$

podobnie jak to robiliśmy dla błędu maksymalnego. W pierwszej pracowni można przyjąć  $k = 3$ :

$$U(x) = 3u(x) \quad (55)$$

W praktyce, w pierwszej pracowni często mamy do czynienia z systematycznymi (nielosowymi) odchyleniami wyników, dlatego, że stosujemy proste przyrządy i proste modele teoretyczne. Nie należy się więc dziwić ani martwić, gdy wartość tablicowa leży poza naszym przedziałem  $x \pm U(x)$ . Jednak rząd wielkości – przy prawidłowych pomiarach i obliczeniach – zawsze się zgadza z tablicami.



#### 4.4 Z jaką dokładnością mierzymy?

Jeżeli mamy serię pomiarów wykonanych dokładnym przyrządem, takim jak śruba mikrometryczna lub stoper, wówczas niepewność standardową możemy ocenić na podstawie rozrzutu naszych pomiarów:

$$u(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (56)$$

Z drugiej strony, jeżeli mamy pojedynczy pomiar, wówczas oceniamy niepewność maksymalną (rozdział 3.1), następnie dzielimy ją przez  $\sqrt{3}$  i otrzymujemy ocenę niepewności standardowej:

$$u(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}} \quad (57)$$

(dlaczego? – patrz dodatek A.3). Jeżeli w naszym pomiarze wielkości  $x$  dostrzegamy dwa niezależne źródła niepewności  $u_1(x)$  i  $u_2(x)$ , wówczas sumujemy je kwadratowo:

$$u^2(x) = u_1^2(x) + u_2^2(x) \quad (58)$$

#### 4.5 Jak niepewność wielkości mierzonych wpływa na wynik?

Ze sposobu, w jaki przenoszą się odchylenia (wzór 4) wynika przenoszenie się odchyłeń standardowych:

$$u(y) = \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| u(x), \quad (59)$$

lub elementarnie:

$$u(y) = |y(x + u(x)) - y(x)|. \quad (60)$$

Tak samo przenosiły się niepewności maksymalne (wzór 10) lub (12). Natomiast przy większej ilości zmiennych – zgodnie ze wzorem (47) – przyczynki do niepewności standardowej  $y$  pochodzące od poszczególnych zmiennych  $x_1, x_2, \dots$  sumują się kwadratowo:

$$u^2(y) = \left[ \frac{\partial y}{\partial x_1} u(x_1) \right]^2 + \left[ \frac{\partial y}{\partial x_2} u(x_2) \right]^2 + \dots \quad (61)$$

Powyższy wzór jest nieco bardziej skomplikowany niż dla błędów maksymalnych (wzór 14).

Dla funkcji o szczególnej postaci  $y = ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots$  znacznie łatwiej jest posługiwać się względnymi niepewnościami standardowymi:

$$y = ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots \Rightarrow u_r^2(y) = k_1^2 u_r(x_1)^2 + k_2^2 u_r(x_2)^2 + \dots \quad (62)$$

Wzór (62) wynika ze wzoru (61) podobnie jak (16) wynika z (14).

Przykład. Wzór na objętość walca ma postać iloczynową:  $V(r, h) = \pi r^2 h$ . Jeżeli znamy  $r$  i  $h$  z względną niepewnością standardową 1%, wówczas możemy ze wzoru (62) obliczyć  $u_r(V)$ :

$$\begin{aligned} u_r^2(V) &= 2^2\left(\frac{1}{100}\right)^2 + 1^2\left(\frac{1}{100}\right)^2 = 5\left(\frac{1}{100}\right)^2 \\ u_r(V) &= \sqrt{5}\left(\frac{1}{100}\right) = 2.2\left(\frac{1}{100}\right) = 2.2\% \end{aligned} \quad (63)$$

Zauważmy, że dla niepewności maksymalnych otrzymalibyśmy 3%.

## 4.6 Regresja liniowa

W niektórych ćwiczeniach na I pracowni zalecane jest użycie metody opracowania pomiarów zwanej *regresją liniową*. Tę metodę stosuje się wówczas, gdy spodziewamy się, że zależność między dwiema wielkościami mierzonymi w ćwiczeniu jest liniowa:  $y = ax + b$ . Jeżeli mamy serię pomiarów  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots$ , wówczas możemy wyznaczyć współczynniki  $a$  i  $b$ . W ćwiczeniach często jest tak, że szukana wielkość fizyczna jest współczynnikiem  $a$  lub jest do niego wprost lub odwrotnie proporcjonalna. Współczynnik  $a$  nazywamy *nachyleniem* prostej lub *współczynnikiem kierunkowym prostej*. Zauważmy, że jest on równy pochodnej  $\frac{dy}{dx}$ , a jego jednostką jest  $\frac{[\text{jednostka } y]}{[\text{jednostka } x]}$ .

Wzory pozwalające obliczyć współczynniki  $a$  i  $b$  oraz ich niepewności standardowe  $u(a)$  i  $u(b)$  są skomplikowane. Można je znaleźć w instrukcji ONP. W praktyce obliczenia „ręczne” okazują się uciążliwe, a ryzyko pomyłki – duże. W tej sytuacji warto skorzystać z jakiegoś narzędzia komputerowego. Przykładowy arkusz kalkulacyjny można znaleźć tutaj:

[www.szczepkowicz.ifd.uni.wroc.pl/studenci/](http://www.szczepkowicz.ifd.uni.wroc.pl/studenci/)

Alternatywnie czytelnik może sam zaimplementować wzory regresyjne z ONP za pomocą swojego ulubionego narzędzia komputerowego.

Przykład. W ćwiczeniu badano zależność oporu drutu platynowego od temperatury i uzyskano następujące wyniki:

$T$ [°C]	0	20	40	60	80	100
$R$ [Ω]	101.34	108.74	116.73	121.94	129.43	140.07

Obliczamy współczynniki  $a, b$  regresji liniowej

$$R(T) = aT + b. \quad (64)$$

W tym celu przepisujemy dane z tabeli do wspomnianego wyżej arkusza:

$x$	$y$
0.00E+00	101.34
2.00E+01	108.74
4.00E+01	116.73
6.00E+01	121.94
8.00E+01	129.43
100	140.43

(w tym arkuszu wartości „ $x$ ” po wpisaniu są automatycznie zamieniane na postać wykładniczą, np.  $40 = 4 \cdot 10^1 = 4.00E+01$ ). Teraz możemy odczytać współczynniki  $a$ ,  $b$  oraz ich niepewności standardowe:

$$\begin{aligned} a &= 0.375 \text{ } \Omega/\text{ }^\circ\text{C}, & u(a) &= 0.018 \text{ } \Omega/\text{ }^\circ\text{C} \\ b &= 101.0 \text{ } \Omega, & u(b) &= 1.1 \text{ } \Omega \end{aligned} \quad (65)$$

Jednostki współczynników wynikają z analizy jednostek we wzorze (64). Ostatnim krokiem jest określenie szukanej wielkości fizycznej. *Temperaturowy współczynnik rezystancji*  $\alpha$  jest zdefiniowany wzorem

$$R(T) = R_0(1 + \alpha \cdot T) = (R_0\alpha)T + R_0. \quad (66)$$

Z porównania wzorów (64) i (66) widzimy, że

$$b = R_0 = 101.0 \text{ } \Omega, \quad u(R_0) = 1.1 \text{ } \Omega \quad (67)$$

natomiast

$$a = (R_0\alpha), \quad (68)$$

czyli

$$\alpha = \frac{a}{R_0} = \frac{0.375 \text{ } \Omega/\text{ }^\circ\text{C}}{101.0 \text{ } \Omega} = 3.713 \cdot 10^{-3} \text{ } (1/\text{ }^\circ\text{C}). \quad (69)$$

Na koniec z niepewności  $u(a)$  i  $u(R_0)$  obliczamy niepewność standardową  $u(\alpha)$ :

$$\begin{aligned} u^2(\alpha) &= \left( \frac{\partial \alpha}{\partial a} u(a) \right)^2 + \left( \frac{\partial \alpha}{\partial R_0} u(R_0) \right)^2 \\ &= \left( \frac{1}{R_0} u(a) \right)^2 + \left( \frac{a}{R_0^2} u(R_0) \right)^2 \\ &= \left( \frac{1}{101.0} 0.018 \right)^2 + \left( \frac{0.375}{101.0^2} 1.1 \right)^2 \\ &= 3.34 \cdot 10^{-8} \end{aligned} \quad (70)$$

Zatem  $u(\alpha) = 1.83 \cdot 10^{-4}$ . Ostatecznie wynik zapisujemy tak:

$$\alpha = 3.71 \cdot 10^{-3} \text{ } (1/\text{ }^\circ\text{C}), \quad u(\alpha) = 0.18 \cdot 10^{-3} \text{ } (1/\text{ }^\circ\text{C}) \quad (71)$$

lub krócej:

$$\alpha = 3.71(18) \cdot 10^{-3} \text{ (1/}^\circ\text{C)} \quad (72)$$

Sposób zapisu (72) jest często stosowany w pracach naukowych.

#### 4.7 Przykład – Ćwiczenie 9

Moduł Younga  $E$  jest jedną ze stałych charakteryzujących własności sprężyste materiału. W Ćwiczeniu 9 mamy za zadanie wyznaczyć moduł Younga drutu. Pod wpływem siły rozciągającej  $F$  drut zwiększa swoją długość od  $l_0$  do  $l_0 + z$ . Przyrost długości (wydłużenie)  $z$  jest proporcjonalny do siły:

$$z = \frac{1}{E} \frac{4l_0}{\pi d^2} \cdot F \quad (73)$$

$$[\text{m}] = \left[ \frac{1}{(\text{N/m}^2)} \frac{\text{m}}{\text{m}^2} \right] \cdot [\text{N}]$$

gdzie  $l_0$  oznacza początkową długość drutu, a  $d$  jest jego średnicą.

Instrukcja do Ćwiczenia 9 proponuje, by zacząć od kilkukrotnego zmierzenia długości początkowej drutu  $l_0$ :

Długość początkowa drutu $l_0$			
$l_{0i}$ [mm]	$\bar{l}_0$ [mm]	$u(l_0)$ [mm]	$u_r(l_0)$
946, 945, 946, 947, 947	946.20	0.37	0.00040 = 0.040%

Obliczenia wykonaliśmy przy użyciu wzorów podanych w rozdziale 4.2. Może się jednak zdarzyć, że nasze pomiary długości drutu nie wykazują rozrzutu (to znaczy, że rozrzut jest mniejszy niż działka elementarna i jest niewykrywalny). Wówczas możemy przyjąć  $\Delta l_0 = 1 \text{ mm}$ ,  $u(l_0) = 1 \text{ mm}/\sqrt{3} = 0.56 \text{ mm}$  (por. wzór 57) i  $u_r(l_0) = 0.00059 = 0.059\%$ . Jak widać, względna niepewność standardowa jest bardzo niewielka; będzie ona miała zanedbywalny wpływ na niepewność wyznaczenia stałej  $E$ .

Następnie mierzymy średnicę drutu  $d$ :

Średnica drutu $d$			
$d_i$ [mm]	$\bar{d}$ [mm]	$u(d)$ [mm]	$u_r(d)$
0.79, 0.79, 0.78, 0.77, 0.78	0.7820	0.0037	0.0048 = 0.48%

Zauważmy, że niepewność względna  $u_r(d)$  jest ponad 10-krotnie większa od poprzednio obliczonej  $u_r(l_0)$ .

Mierzone wydłużenia (przyrosty długości)  $z$  są małe – obserwuje się je przez mikroskop, w którego polu widzenia znajduje się podziałka. Mierzmy bezpośrednio zatem nie wydłużenie  $z$  w milimetrach, tylko wydłużenie  $z^*$  w działkach. Przelicznik z działek na milimetry uzyskujemy w ten sposób,

że mierzymy średnicę wskazówki  $d_w$  na dwa sposoby: najpierw śrubą mikrometryczną wyznaczamy średnicę wskazówki  $d_w$  w milimetrach, a następnie wyznaczamy średnicę wskazówki  $d_w^*$  w działkach. Wydłużenia  $z$  [mm] będziemy mogli wyznaczyć z proporcjonalności:

$$\frac{z \text{ [mm]}}{z^* \text{ [działki]}} = \frac{d_w \text{ [mm]}}{d_w^* \text{ [działki]}} \quad (74)$$

Oto wyniki pomiarów średnicy wskazówki:

Średnica wskazówki $d_w$ mierzona śrubą mikrometryczną			
$d_{wi}$ [mm]	$\bar{d}_w$ [mm]	$u(d_w)$ [mm]	$u_r(d_w)$
0.95, 0.93, 0.93, 0.96, 0.93	0.9400	0.0063	0.0067 = 0.67%

Średnica wskazówki $d_w^*$ obserwowana w mikroskopie (odczyt przy różnych siłach rozciągających)			
$d_{wi}^*$ [działki]	$\bar{d}_w^*$ [działki]	$u(d_w^*)$ [działki]	$u_r(d_w^*)$
14,13,14,14,14	13.80	0.20	0.014 = 1.4%

Zauważmy, że pomiary  $d_{wi}^*$  prawie nie wykazują rozrzutu, zatem przedstawione w tabeli oszacowanie niepewności na podstawie rozrzutu jest dyskusyjne (co by było, gdyby pięciokrotnie wyszło 14?). Alternatywnie można przyjąć, że niepewność maksymalna  $\Delta d_w^*$  jest równa jednej lub połowie działki (zależnie od naszej oceny precyzji odczytu), wówczas  $u(d_w^*) = \Delta d_w^* / \sqrt{3}$  (wzór 57). Przyjęcie po prostu  $u(d_w^*) = 0.5$  [działki] również jest dopuszczalne.

Wniosek z pomiarów średnicy wskazówki jest następujący:  $d_w/d_w^* = 0.0681$  [mm/działka].

Następnie mierzymy wydłużenia drutu dla różnych wartości sił rozciągających:

Siła	Wydłużenie drutu
$F_i$ [N]	$z_i^*$ [działki]
9.81	1
19.62	2
29.43	4
39.24	5
49.05	7
58.86	11
49.05	9
39.24	7
29.43	5
19.62	3
9.81	2

Mamy już komplet pomiarów bezpośrednich. Teraz obliczymy stałą  $E$  – moduł Younga. Z połączenia wzorów (73) i (74) otrzymujemy

$$z^* = \boxed{\frac{4l_0 d_w^*}{\pi d^2 E d_w}} \cdot F \quad (75)$$

gdzie ramką oznaczono współczynnik kierunkowy funkcji  $z^* = f(F)$ . Współczynnik ten możemy obliczyć wpisując dane z tabeli ( $F_i, z_i^*$ ) do arkusza kalkulacyjnego wspomnianego w rozdziale 4.6. Współczynnik ten wynosi

$$a = 0.202 \left[ \frac{\text{działka}}{\text{niuton}} \right], \quad u(a) = 0.024 \left[ \frac{\text{działka}}{\text{niuton}} \right], \quad u_r(a) = 0.12 = 12\% \quad (76)$$

Z przekształcenia równości

$$a = \boxed{\frac{4l_0 d_w^*}{\pi d^2 E d_w}} \quad (77)$$

otrzymujemy wzór pozwalający obliczyć moduł Younga:

$$E = \frac{4l_0 d_w^*}{\pi d^2 d_w a} = \frac{4 \cdot (946.20 \cdot 10^{-3}) \cdot 13.80}{\pi (0.7820 \cdot 10^{-3})^2 \cdot (0.9400 \cdot 10^{-3}) \cdot 0.202} = 1.43 \cdot 10^{11}$$

$$\left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] = \left[ \frac{\text{m} \cdot \text{działka}}{\text{m}^2 \cdot \text{m} \cdot (\text{działka}/\text{N})} \right] \quad (78)$$

Na koniec ocenimy niepewność obliczonego  $E$ . Wzór (78) ma postać iloczynową  $E = (4/\pi)l_0^1 (d_w^*)^1 d^{-2} d_w^{-1} a^{-1}$ , zatem, korzystając z (62), otrzymujemy

$$u_r^2(E) = u_r^2(l_0) + u_r^2(d_w^*) + 4u_r^2(d) + u_r^2(d_w) + u_r^2(a) \quad (79)$$

$u_r(l_0)$	00.04%
$u_r(d_w^*)$	01.40%
$u_r(d)$	00.48%
$u_r(d_w)$	00.67%
$u_r(a)$	12.00%
$u_r(E)$	12.11%
	(sumowanie kwadratowe!)

Jak widać, dominującym przyczynkiem do błędu jest niepewność współczynnika kierunkowego wynikająca z rozrzutu danych ( $F_i, z_i^*$ ) wokół teoretycznej prostej. Jeżeli przyjrzymy się dokładniej tabeli ( $F_i, z_i^*$ ) na stronie 21, zauważymy, że obserwowane wydłużenie nieoczekiwanie „przeskoczyło” aż o 4 działki pomiędzy ciężarem 49.05 N a 58.86 N. Być może zbyt słabo umocowana wskazówka została potrącona przez eksperymentatorów.

Obliczamy niepewność standardową (bezwzględną):  $u(E) = E \cdot u_r(E) = 1.43 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 0.1211 = 0.173 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ . Ostateczny wynik możemy zapisać tak (por. zapis (71) i (72)):

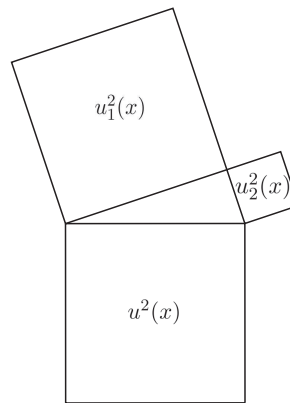
$$E = 1.43(17) \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad (80)$$

Alternatywnie, jeżeli chcemy podać niepewność rozszerzoną zamiast standardowej (por. rozdział 4.3):  $U(E) = 3u(E) = 0.520 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ , co możemy zapisać tak:

$$E = (1.43 \pm 0.52) \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad (81)$$

Przykład ten ilustruje pewne ogólne zasady dotyczące oceny niepewności pomiarowych:

- Warto posługiwać się niepewnościami *względnyymi*. Jest to rachunkowo łatwiejsze i umożliwia szybkie zorientowanie się, które przyczynki do niepewności można zaniedbać (oszczędność czasu!).
- Duże niepewności „połykają” małe. Wystarczy, że przyczynek  $u_1(x)$  jest trzy razy większy od  $u_2(x)$ , wówczas  $u_2(x)$  można w praktyce zaniedbać, bo modyfikuje ocenę niepewności zaledwie o 5%.



Pola dużych kwadratów na rysunku prawie się nie różnią, bo  $u^2(x) = u_1^2(x) + u_2^2(x) = u_1^2(x) + (\frac{1}{3}u_1(x))^2 = \frac{10}{9}u_1^2(x) \Rightarrow u(x) = 1.05u_1(x)$ .

\*

Będę wdzięczny za przekazywanie mi informacji o błędach zauważonych w tym opracowaniu.

\*

## 5 Literatura

Przygotowując niniejszy opis korzystałem z opracowania

Instrukcja ONP (Oceny Niepewności Pomiarowej)  
[www.pracownia.ifd.uni.wroc.pl/html/ONP.pdf](http://www.pracownia.ifd.uni.wroc.pl/html/ONP.pdf)

Zaglądałem również na stronę internetową NIST

[physics.nist.gov/cuu/](http://physics.nist.gov/cuu/)

Czytelnikom szczególnie zainteresowanym problematyką niepewności pomiarowej można polecić dokument

Evaluation of measurement data.  
Guide to the expression of uncertainty in measurement  
[www.bipm.org/en/publications/guides](http://www.bipm.org/en/publications/guides)

Studenci fizyki w toku studiów zetkną się z zajęciami i podręcznikami z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki, dzięki którym nauczą się matematycznych narzędzi pozwalających ściślej ująć i głębiej wniknąć w problematykę niepewności pomiarowej.

## A Dodatki

### A.1 Związek między odchyleniem standardowym sumy a odchyleniami standardowymi składników

Załóżmy, że w wyniku pomiaru wielkości  $x$  możemy dostać wynik  $x_1$  z prawdopodobieństwem  $p_1$ , wynik  $x_2$  z prawdopodobieństwem  $p_2$  itd. Podobnie założymy, że w wyniku pomiaru wielkości  $x'$  możemy dostać wynik  $x'_1$  z prawdopodobieństwem  $p'_1$ , wynik  $x'_2$  z prawdopodobieństwem  $p'_2$  itd. Możemy obliczyć wartości średnie  $\bar{x}$  i  $\bar{x}'$  oraz odchylenia standardowe  $\sigma_x$  i  $\sigma_{x'}$ :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \sum_i x_i p_i & \sigma_x^2 &= \sum_i (x_i - \bar{x})^2 p_i \\ \bar{x}' &= \sum_j x'_j p'_j & \sigma_{x'}^2 &= \sum_j (x'_j - \bar{x}')^2 p'_j\end{aligned}\tag{82}$$

Załóżmy, że wielkość obliczana jest sumą  $x+x'$ . Jaka jest średnia i odchylenie standardowe tej sumy? Przestrzeń zdarzeń elementarnych stanowią wszystkie pary  $\{(x_1, x'_1), (x_1, x'_2), (x_1, x'_3), \dots, (x_2, x'_1), (x_2, x'_2), (x_2, x'_3), \dots\}$ . Jeżeli wielkości  $x$  i  $x'$  są niezależne, to prawdopodobieństwo, że składniki sumy są



$(x_i, x'_j)$  wynosi  $p_i p'_j$ , zatem wartość średnia (wartość oczekiwana) sumy  $x + x'$  wynosi

$$\begin{aligned}\overline{x + x'} &= \sum_i \sum_j (x_i + x'_j) p_i p'_j = \sum_i \sum_j x_i p_i p'_j + \sum_i \sum_j x'_j p_i p'_j \\ &= \sum_i x_i p_i \sum_j p'_j + \sum_j x'_j p'_j \sum_i p_i = \sum_i x_i p_i \cdot 1 + \sum_j x'_j p'_j \cdot 1 \\ &= \bar{x} + \bar{x}'\end{aligned}\quad (83)$$

natomiast odchylenie standardowe sumy  $x + x'$  wynosi (łatwiej nam będzie zapisać jego kwadrat)

$$\begin{aligned}\sigma_s^2 &= \sum_i \sum_j [(x_i + x'_j) - (\overline{x + x'})]^2 p_i p'_j \\ &= \sum_i \sum_j [(x_i - \bar{x}) - (x'_j - \bar{x}')]^2 p_i p'_j \\ &= \sum_i (x_i - \bar{x})^2 p_i \sum_j p'_j + \sum_j (x'_j - \bar{x}')^2 p'_j \sum_i p_i \\ &\quad + 2 \sum_i (x_i - \bar{x}) p_i \sum_j (x'_j - \bar{x}') p'_j \\ &= \sigma_x^2 + \sigma_{x'}^2 + 2 \left( \sum_i x_i p_i - \bar{x} \sum_i p_i \right) \left( \sum_j x'_j p'_j - \bar{x}' \sum_j p'_j \right) \\ &= \sigma_x^2 + \sigma_{x'}^2\end{aligned}\quad (84)$$

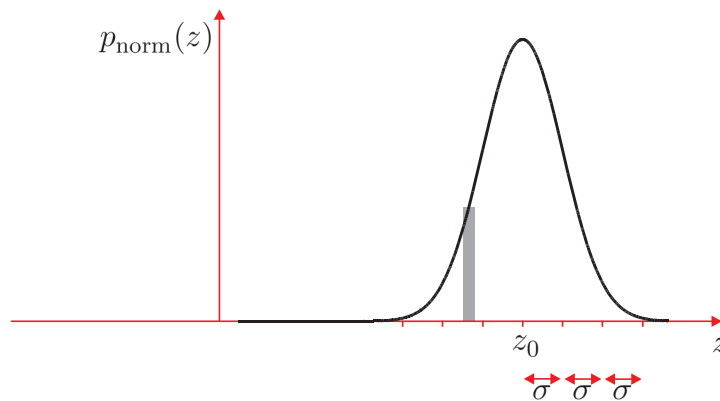
Zatem średnie sumują się „normalnie” („arytmetycznie”), natomiast odchylenia standardowe „sumują się kwadratowo”.

## A.2 Rozkład normalny: $\sigma$ , $2\sigma$ , $3\sigma$

Jeżeli rozrzut wyników pomiarów wielkości fizycznej  $z$  jest spowodowany przez wiele losowych czynników, wówczas wyniki pomiarów mają rozkład zbliżony do rozkładu normalnego:

$$p_{\text{norm}}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp \left[ -\frac{(z - z_0)^2}{2\sigma^2} \right], \quad (85)$$

to znaczy, że prawdopodobieństwo uzyskania wyniku  $z$  z przedziału  $(z, z + dz)$  jest bliskie  $p_{\text{norm}} \cdot dz$  (zacięzione pole na wykresie).



Współczynnik  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$  we wzorze (85) jest tak dobrany, aby prawdopodobieństwo uzyskania jakiegokolwiek wyniku było równe 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_{\text{norm}}(z) dz = 1 \quad (86)$$

Stała w wykładniku jest tak dobrana, że odchylenie standardowe rozkładu (85) wynosi

$$\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} p_{\text{norm}}(z)(z - z_0)^2 dz} = \sigma \quad (87)$$

Prawdopodobieństwo, że wynik leży w przedziale  $(z_0 - \sigma, z_0 + \sigma)$  wynosi

$$\int_{z_0 - \sigma}^{z_0 + \sigma} p_{\text{norm}}(z) dz = 0.683 \quad (88)$$

Podobnie,

$$\int_{z_0 - 2\sigma}^{z_0 + 2\sigma} p_{\text{norm}}(z) dz = 0.955 \quad (89)$$

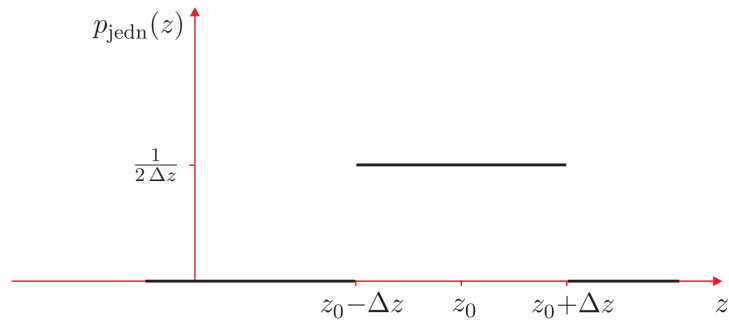
oraz

$$\int_{z_0 - 3\sigma}^{z_0 + 3\sigma} p_{\text{norm}}(z) dz = 0.997 \quad (90)$$

Wzory (86)–(90) można sprawdzić np. używając [www.wolframalpha.com](http://www.wolframalpha.com)

### A.3 Rozkład jednostajny: $\sigma_z = \Delta z / \sqrt{3}$

Założmy, że wyniki pomiarów  $z_i$  mieszczą się w przedziale  $(z_0 - \Delta z, z_0 + \Delta z)$ . Odchylenie standardowe wyników będzie zależało od sposobu, w jaki wyniki rozkładają się w tym przedziale. Jeżeli rozkład ten nie jest znany, to często przyjmuje się upraszczające założenie, że jest on jednostajny:



Stała  $\frac{1}{2\Delta z}$  jest tak dobrana, aby

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_{\text{jedn}}(z) dz = 1 \quad (91)$$

Obliczymy odchylenie standardowe  $\sigma$ :

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{\text{jedn}}(z)(z - z_0)^2 dz = \int_{z_0 - \Delta z}^{z_0 + \Delta z} \frac{1}{2\Delta z} (z - z_0)^2 dz \\ &= \frac{1}{2\Delta z} \int_{-\Delta z}^{\Delta z} t^2 dt = \frac{1}{2\Delta z} \frac{t^3}{3} \Big|_{-\Delta z}^{\Delta z} = \frac{(\Delta z)^2}{3} \end{aligned} \quad (92)$$

Zatem

$$\sigma = \frac{\Delta z}{\sqrt{3}}. \quad (93)$$