Ćwiczenie 11 – częściowe wskazówki do opracowania

Obliczenia

Trzeba rozwiązać układ 3 równań z trzema niewiadomymi, przy czym 1 równanie jest nieliniowe. To nie jest trudne, ale takiego przypadku nie rozpatruje się na lekcjach matematyki.

Pewną trudność w obliczeniach stanowi to, że parametry *a*,*b*,*c* oraz współrzędne *x*,*y*,*z* to nie są zwykłe, geometryczne współrzędne mierzone w metrach, tylko współrzędne w pewnej abstrakcyjnej przestrzeni.

Natomiast współrzędne punktu zamocowania bryły x_1, y_1, z_1 są „zwykle”, mierzone w metrach lub jednostce pochodnej. Jeżeli badaliśmy oś narożnik-narożnik, wówczas są to połówki wymiarów bryły.

Mamy trzy równania:

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

na trzy niewiadome *x*, *y*, *z*. Jak już wyznaczymy *x* ,*y*, *z*, to $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, a szukany moment bezwładności to $I_i = \frac{1}{R^2} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$.

Najpierw obliczmy x^2. Eliminujemy z równania elipsoidy *y* oraz *z*, wyrażając je poprzez niewiadomą *x* na podstawie dwóch pierwszych równań:

$$y = \frac{y_1}{x_1} x ,\ z = \frac{z_1}{x_1} x ,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{{y_1}^2}{{x_1}^2}\frac{x^2}{b^2} + \frac{{z_1}^2}{{x_1}^2}\frac{x^2}{c^2} = 1.$$

Teraz wyciągamy x^2 przed nawias

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{{y_1}^2}{{x_1}^2}\frac{1}{b^2} + \frac{{z_1}^2}{{x_1}^2}\frac{1}{c^2}\right) = 1$$

i nadajemy wyrażeniu formę bardziej regularną

$$\frac{x^2}{{x_1}^2}\left(\frac{{x_1}^2}{a^2} + \frac{{y_1}^2}{b^2} + \frac{{z_1}^2}{c^2}\right) = 1 .$$

Stąd już łatwo obliczyć x^2

$$x^2 = \frac{{x_1}^2}{\left(\frac{{x_1}^2}{a^2} + \frac{{y_1}^2}{b^2} + \frac{{z_1}^2}{c^2}\right)} .$$

Wyrażenia na y^2 i z^2 będą miały analogiczną postać:

$$y^2 = \frac{y_1^{\,2}}{\left(\frac{x_1^{\,2}}{a^2} + \frac{y_1^{\,2}}{b^2} + \frac{z_1^{\,2}}{c^2}\right)}, \quad z^2 = \frac{z_1^{\,2}}{\left(\frac{x_1^{\,2}}{a^2} + \frac{y_1^{\,2}}{b^2} + \frac{z_1^{\,2}}{c^2}\right)}.$$

Po dodaniu trzech powyższych wyrażeń otrzymujemy

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2}}{\left(\frac{x_1^{\,2}}{a^2} + \frac{y_1^{\,2}}{b^2} + \frac{z_1^{\,2}}{c^2}\right)}.$$

Zatem szukany moment bezwładności to

$$I_i = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{\left(\frac{x_1^{\,2}}{a^2} + \frac{y_1^{\,2}}{b^2} + \frac{z_1^{\,2}}{c^2}\right)}{x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2}}.$$

W ostatnim kroku uwzględniamy związek pomiędzy półosiami elipsoidy a momentami bezwładności:

$$\boxed{I_i = \frac{I_x x_1^{\,2} + I_y y_1^{\,2} + I_z z_1^{\,2}}{x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2}}}$$

Dopiero do tego wzoru wstawiamy wartości liczbowe. Wzór w ramce to po prostu średnia ważona: średnia trzech momentów bezwładności ważona przez kwadraty współrzędnych punktu bryły przez który przechodzi oś. Jeżeli badaliśmy drgania wokół osi narożnik-narożnik, to za x_1, y_1, z_1 wstawiamy współrzędne narożnika, czyli połówki wymiarów bryły (jeżeli zapomnimy o dzieleniu przez dwa, wynik końcowy nie zmieni się).